

13. 考察

【本時について】

導入として、ドミノを扱った。これは、長さと時間が自然と違って、子どもたちが自分で測定できるものであるからであった。事前にビデオでとっておいた子どもたちがドミノを倒している動画を見て、「どれが1番速く進んだでしょう」の課題で取り組んだ。「どれが一番速いでしょう」の課題では、時間が短いものが速いとすぐに判断してしまう子どもがいたり予想し、進んでいる速さについて考える課題であることがわかりやすいよう、今回の課題にした。しかし、子どもたちからは「速いってどういうこと？」などの質問が授業中に出たり、速さを瞬間の速さでとらえている子どもがいたり、見えないものを考えるのはとても難しいことのようにであった。

山場として、私が子どもの発言を止めなくてはいけなかったところが2カ所あった。

1つめは、ドミノが倒れるのにかかった時間を計った場面である。1番のドミノが5秒、2番のドミノが5.2秒とわかった時点で子どもたちからは、「2番や。」「これだけで、2番の方が速いってわかる」などのつぶやきが多数出ている。まずはこの場面で、なぜ2番の方が速いといえるのかを全員で共有しておくべきであった。「0.2秒しか変わらないのに、1番と2番は80cmも違うから」「0.2秒で80センチメートルも進めない」などの意見を引き出せていたら、子どもたちがもっと長さや時間の関係にせまることができたように思う。

2つめは、わり算で計算した子どもが出てきた場面である。協議会でも「なぜ、わり算かを話し合いたいよね」と意見をいただいたが、その通りである。なぜ、わり算で求めることができるのかを語ることであれば、速さについての理解が深まる場面であった。個人思考の場面で子どもたちのノートを見ると計算している子どもの多くはわり算をしていた。しかし、なんとなくわり算をしている子ども、かけ算ではおかしいと考えわり算をしている子どもなどが多く、1秒間あたりを求めるためにわり算をしていた子どもは少なかった。なぜ、わり算かを話し合うことは難しい課題ではあるが、2番と3番を直接比較することはできないからこそ1秒間あたりで比べられる良さに気付くことができるチャンスであった。また、人口密度や割合などと同じ学習であるとなつなげることもできたかもしれない。

子どもの発言で1番迷ったのが、「四捨五入」の扱いである。利便性を追求してわり算がしやすいよう5.2秒を5秒、6.8秒を7秒にして計算していたからである。3けたのわり算は子どもたちにとっては既習であってもややこしいものである。しかも、わる数が小数ならばなおさらである。今回3.75メートルではなく、375センチメートルという表記にしたのは、1秒間あたりを子どもたちに求めてもらいたかったからである。1メートルあたりと両方求めてしまうと難しい子どもたちにとっては余計混乱してしまう。そこで、 $5.2 \div 455$ はしないだろうと考え、センチメートルでの表記にした。予想通り、1メートルあたりや1センチメートルあたりを求めている子どもはほとんどいなかった。

しかし、数字が大きいのので計算の過程でつまづく子どももいた。今回のねらいは計算ができることではないので電卓を用意しておけばよかったのではないかという意見もいただいた。

本時の最後に測定の場面をもってきた。実際にドミノを並べて、倒れた長さと時間を計って速さを求める活動である。今回の単元構成でこだわったところである。子どもたちが自分で測定できるようにしたい。速さとはこういうことだと身をもって感じられるようにしたいと考えた。話し合いでは聞くことだけしかできなかった子どもも、グループで実際に活動することで、速さを求めるためには、倒れた長さとそれにかかった時間が必要であることがわかったと思う。子どもたちが実際に測定することを通して速さを求めることはできたが、やはり視覚的に速さの違いを確かめられることができればもっとよかったと感じた。

5. 授業実践「チューリップ問題」(12/10, 梅本)

チューリップ問題の指導案

1. 本時の目標 具体的な事柄について、起こり得る場合を順序よく整理して調べることがで

きるようになる。

2. 本時の指導計画

授業展開の[] は授業開始からの経過時間の予定を書いている。

□授業展開	□児童の動き	□授業者の動き
□導入 (7分程度)	□プリント①に取り組む。	□今日の授業では計算はなく、数字もほとんど出てこない。 考えることが中心になることを伝える。 □どれが誰のチューリップか当ててもらいます。 □プリント①配布
[7] □展開 (35分程度)	□発表 □プリント②に取り組む(5分)	□おそらくすぐに解くことができるのであまり時間はとらない。 ★どうやって解いていったのかをプリント①に書き込むように伝える。 時間が来れば、 ①持ち主の確認 ②誰から決まったのかななどを聞く。 □プリント②配布
[17]		★①のように決まらないことを確認。決まるものもあるので、決まったものをまず確認する。 その後決まっていなくて、決まっていなくてチューリップを確認。 ★ここで誰が決まっていなくて、誰が決まっていなくてのかをきちんと確認する。

プリント①

6年 組 名前 ()

●めあて 順序よく考えていこう。

●4つのチューリップについて4人が次のように言っています。



- ・上の条件に合うようにどれが誰のチューリップなのかを考えていきます。
- ・どのチューリップから決まったのかなど、自分がどのように考えたのかを簡単にメモしておきましょう。
- ・絵の下の () の中に持ち主の名前を書きましょう。

●左に書いていることから次の二つの場合について考えてみよう。

A



() () () ()

メモ

B



() () () ()

メモ

プリント②

6年 組 名前 ()

●めあて 順序よく考えていこう。

●4つのチューリップについて4人が次のように言っています。



- ・上の条件に合うようにどれが誰のチューリップなのかを考えていきます。
- ・どのチューリップから決まったのかなど、自分がどのように考えたのかをメモしておきましょう。
- ・絵の下 () の中に考えられる持ち主の名前を書きましょう。

C



() () () ()

メモ

() () () ()

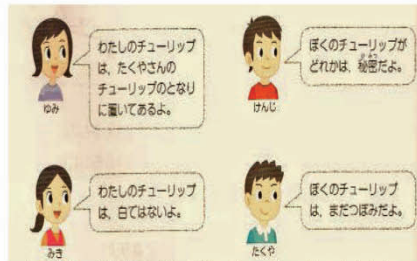
() () () ()

() () () ()

(プリント③-1)

●めあて 順序よく考えていこう。

●4つのチューリップについて4人が次のように言っています。



- ・上の条件に合うようにどれが誰のチューリップなのかを考えていきます。
- ・どのチューリップから決まったのかなど、**自分がどのように考えたのかをメモしておきましょう。**
- ・絵の下の()の中に考えられる持ち主の名前を書きましょう。

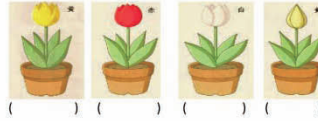
□プリント①のようにつけたしをせずに決まってしまうばそれでおしまい。

□プリント②のようにつけたしが必要であればつけたしも考えてみよう。

- ・つけたしの方法は
- ①4人のうちの一人を選ぶ。
- ②「誰かのとなり」、「この色ではない」のどちらかにしましょう。
- ③チューリップの持ち主が誰になるのかも最後に書いてください。

プリント③

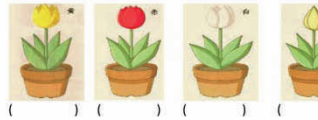
6年 組 名前 ()



・考え方を書こう。

・つけたしがあれば下の()に書いてください。
「 さん」()

・そのつけたしでチューリップの持ち主はどうなるかな？



③-1

(プリント③-3)

●めあて 順序よく考えていこう。

●4つのチューリップについて4人が次のように言っています。



- ・上の条件に合うようにどれが誰のチューリップなのかを考えていきます。
- ・どのチューリップから決まったのかなど、**自分がどのように考えたのかをメモしておきましょう。**
- ・絵の下()の中に考えられる持ち主の名前を書きましょう。

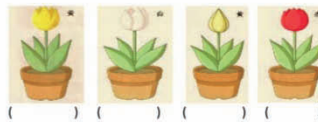
□プリント①のようにつけたしをせずに決まってしまうばそれでおしまい。

□プリント②のようにつけたしが必要であればつけたしも考えてみよう。

- ・つけたしの方法は
- ①4人のうちの一人を選ぶ。
- ②「誰かのとなり」、「この色ではない」のどちらかにしましょう。
- ③チューリップの持ち主が誰になるのかも最後に書いてください。

プリント③

6年 組 名前 ()



・考え方を書こう。

・つけたしがあれば下の()に書いてください。
「 さん」()

・そのつけたしでチューリップの持ち主はどうなるかな？



③-3

6. 授業実践「面積が変わる秘密を探ろう」(12/16, 和田)

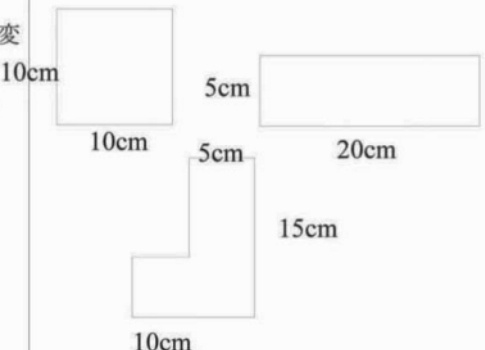
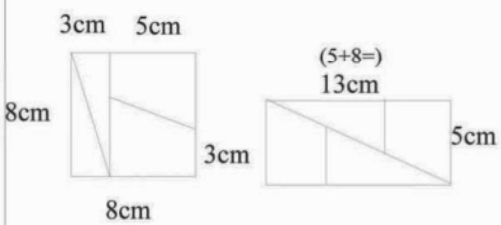
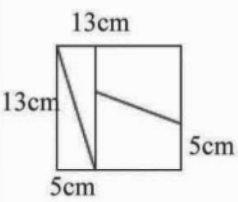
学習指導案(略案)

和歌山大学教育学研究科 和田 涼太

- ・ 単元名 面積のはかり方と表し方
- ・ 単元目標、単元計画 省略
- ・ 本時の目標

図形の面積を計算によって求めることができるようにする。図形についての観察や構成などの活動を通して、平面図形についての理解を深める。

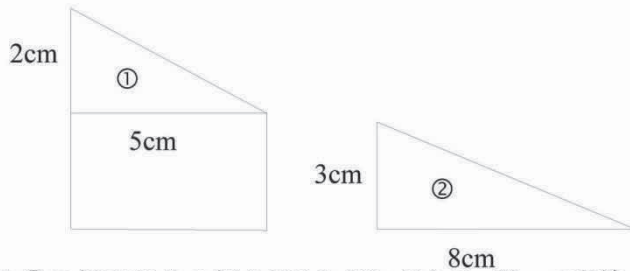
- ・ 本時の展開

時間	学習活動	生徒の活動	留意点
導入 10分	正方形を等積変形して、面積が変わらないことを確認する。 「このように切って形を変えても、面積は変わりませんね。」	 いずれの場合も面積が 100cm^2 となることを確認する。	
展開 30分	「次に、とても不思議な切り方をしてみます。」 右図の正方形、長方形(*)の面積は、 正方形: $8 \times 8 = 64\text{cm}^2$ 長方形(*): $13 \times 5 = 65\text{cm}^2$ 面積の違いは隙間が空いていることを説明する。	 (面積) $8 \times 8 = 64\text{cm}^2$, $13 \times 5 = 65\text{cm}^2$ 面積が合わないのは隙間が空いているからということを理解する。 	※実際は少し真ん中部分が隙間となっている。 ※事前に切り取り線は書いておく。
まとめ 5分	このような形は以降 21, 44, 65, ... と後ろの2数を足した数になるように辺を作るとできることを説明する。	(面積) 正方形: $13 \times 13 = 169\text{cm}^2$, 長方形: $21 \times 8 = 168\text{cm}^2$ 今度は重なっているの、正方形の方が大きくなる。	フィボナッチ数列となっている。

本授業は、教科書の表紙(啓林館算数5下)に書かれている図形に類似した形式である。次の二つの性質(i),(ii)を利用した。

(i) 二つの図形の斜めの部分の傾きが違うので、隙間か重なりどちらかが起こる。

例) 8cm 四方の正方形で、本授業のように 3cm, 5cm で切り取って図形を作ると、



①と②の斜辺部分の傾きがそれぞれ異なる。従って直線ではないのである。
 この場合は①の勾配は約 21.8° 、②は 20.6° となるので、①と②の頂点部分がわずかにへこむ。
 よって隙間が生じ、長方形の方が面積が大きくなる。

また、13cm 四方にした場合、それぞれ①底辺 8cm, 高さ 3cm、②底辺 13cm 高さ 5cm となるので、
 ①の勾配は約 20.6° 、②は約 21° となり、今度は出っ張り気味になるので、重なりが生じ、面積は正方形の方が大きくなる。

(ii) 面積の差が常に 1 となるのは、フィボナッチ数列の法則(カッシーニ・シムソンの定理)によるものである。その定理は、

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad (n \geq 0) \text{ のとき、}$$

$$f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n \quad (n \geq 1)$$

というものによる。以下に証明も記述しておく。

数学的帰納法を使う。

(1) $n = 1$ のとき、 $f_0f_2 - f_1^2 = 0 \cdot 1 - 1 = -1$ より成立する。

(2) $n = k$ のとき、すなわち

$$f_{k-1}f_{k+1} - f_k^2 = (-1)^k$$

が成り立つと仮定する。ここで、 $f_{k+2} = f_k + f_{k+1}$ に注意すると、

$$\begin{aligned} f_k f_{k+2} - f_{k+1}^2 &= f_k (f_k + f_{k+1}) - f_{k+1}^2 \\ &= f_k^2 + f_k f_{k+1} - f_{k+1}^2 \\ &= f_k^2 + f_{k+1}(f_k - f_{k+1}) \end{aligned}$$

ここで、 $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ なので、 $f_k - f_{k+1} = -f_{k-1}$ より、

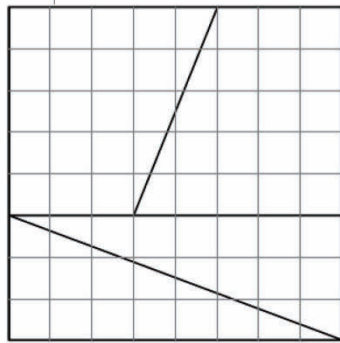
$$\begin{aligned} f_k f_{k+2} - f_{k+1}^2 &= f_k^2 - f_{k+1} f_{k-1} \\ &= -(f_{k+1} f_{k-1} - f_k^2) \\ &= -(-1)^k = (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

従って (1)(2) より、本定理は証明された。

面積が変わる秘密を探ろう！

年 組 名前()

- 一辺が 8cm の正方形で考えよう！

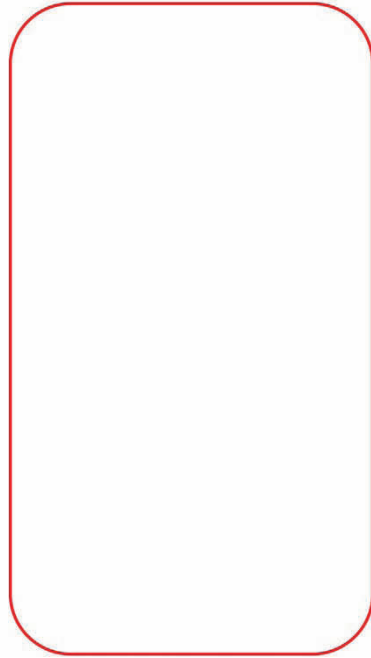


一辺が 8cm の正方形の面積は、

(式)

cm²

- 長方形を貼り付けて、面積も求めてみよう！

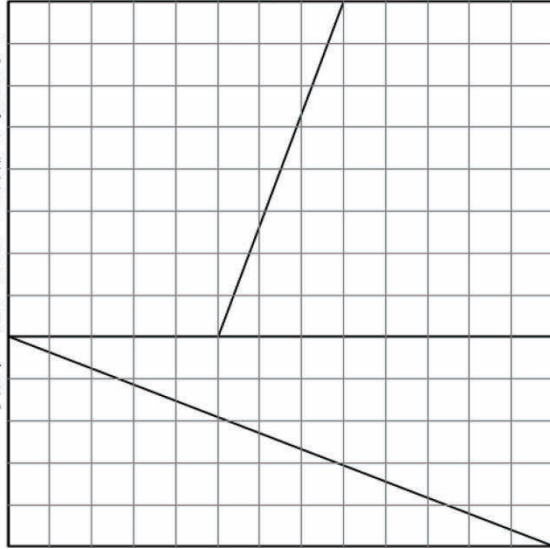


この長方形の面積は、

(式)

cm²

- 次は、一辺が 13cm の正方形で考えよう！



一辺が 13cm の

正方形の面積は、

(式)

cm²

- 長方形を貼り付けて、面積も求めてみよう！

この長方形の面積は、

(式)

cm²

7. 講義「「割合」の理解と演算決定」(山本紀代氏)

算数授業に関する学習会レジュメ

平成 27 年 1 月 14 日

於：和歌山大学教育学部

「割合」の理解と演算決定

—低学年からの一貫した「式」指導に着目して—

和歌山市教育委員会客員指導主事 山本 紀代

1 はじめに

全国学力学習状況調査結果の分析において、毎年、正答率の低さを指摘されるのが「割合」である。それは、以前より 5 年生の担任がその指導に憂慮していた単元である。これまでにも、割合の指導そのものだけでなく、それ以前の課題として、数を整数から小数や分数に拡張する際の指導方法、また、「比例」の概念の獲得等にも着目し、実践や研究がなされてきている。

しかし、理解の程度に好転がなく、算数科の他の内容の理解度も合わせた児童の実態から察すると、「割合」の概念がその単元の指導で初めて学ぶような印象が強く、乗法の指導とのつながりが見えにくい。また、関係を表す「式」の指導が十分なされていないようにも思われ、ここにも課題があると考ええる。

平成 20 年度の学習指導要領では、低学年にも「数量関係」の領域が設けられた。低学年から数量についての事柄を表現する「式」の意味を、これまで以上に意識した指導が求められる。

ここでは、理解が困難であるとされてきた割合の指導を、「式」の指導と「乗法」の理解という視点から考察する。

2 学習指導要領に見られる式の扱い

学習指導要領に「式」や「数量の関係」という表現が記述されたのは、昭和 33 年改訂からである。それ以前は、低学年では、例となる文章問題に対応して「これに対する計算」として、式が記述され、3 学年の内容「問題解決」で「式」と表現されている程度である。

昭和 33 年改訂の学習指導要領において、学年別の目標と内容に以下のように示されている。(① 以下、平成 20 年学習指導要領以外は、全て同資料を参考にし引用。下線は、筆者)

第 1 学年 2 内容 A 数と計算 (5) 加法・減法が用いられる簡単な場合について理解させる。イ 加法・減法の記号を用いて式をかいたり読んだりすること。

第 2 学年 1 目標 (4) 乗法や測定と関連して、割合の考えの基礎となることが

らについて理解させる。また、簡単な数量の関係を記号や式を用いて表わしたり読んだりする能力を伸ばす。

第3学年 1 目標 (4) 割合の考え方を漸次伸ばすとともに、基本的な場合に、数量の関係を式で表わすことが確実にできるようにする。

用語「しき」の指導は、2学年の数と計算「用語と記号」に記されている。数量関係の領域は3年生以上に設けられ「C 数量関係」「D 図形」となっている。

昭和43年の改訂では、「C 図形」「D 数量関係」と領域の順番が変更され、2年生に「数量関係」の領域が設けられている。第1学年から「式」の表記が無くなった。

第2学年の、目標と数量関係に以下の記述がある。

1 目標 (4) 事がらを整理して表すことや式の意味などについて、漸次理解させる。

D 数量関係 (式表示)

(1) 数量の関係を式に表わしたり式をよんだりすることができるようにする。

ア 式が数量についての事がらや関係を表わす簡潔な表現であることを知り、式を用いること。

第3学年の数量関係は、次のように示されている。

(関 数)

(1) 二つの数量を関係づけてみることや、その関係を調べる見方を漸次のぼす。

ア 簡単な場合について、対応する数量を考え、値の組を作ったりこれを表などにまとめたりすること。

(式表示)

(2) 数量の関係を式で表わしたり、それをよんだりする能力を漸次のぼす。

ア 数量の関係を公式の形に表わすこと。

イ 数量を□、△などを用いて表わしたり、□、△などにあてはまる数を調べたりすること。

昭和52年の改訂で、第2学年から数量関係の領域がなくなり、第1学年の「式」に関する記述はない。「式」は2年生の数と計算で次のように記された。

(4) 数量の相等及び大小の関係を等号や不等号を用いて表すなど、事柄や関係を式を用いて簡潔に表したり、式をよんだりすることができるようにする。

平成元年の改訂から、低学年では数と計算の領域で「式で表すこと、式を読むこと」が復活し、平成20年の改訂まで継続された。

平成20年の改訂では、「式の表現と読み」の内容として、四則演算の式に加えて第2学年に「加法と減法の相互関係の式」、第3学年「□などを用いた式」、第4学年「□、△などを用いた式」第5学年「数量の関係を表す式」、第6学年「文字a、xなどを用いた式」を示している。

また、「加法と減法の相互関係について理解し、式を用いて説明できるようにする。」(②「2年生 D 数量関係 D(1) 加法と減法の相互関係」、下線は筆者)と、式を表現方法のひとつとして明確に位置付けている。

平成元年の改訂までは、特に第1学年での「式」の扱いに一貫性がない。その理由を検討することについては、今後の課題としたい。

平成元年の改訂から、「式」への関心が向けられるようになったが、具体的な指導方法の工夫や指導の評価に取り上げられることは少なかった。

平成20年改訂の学習指導要領解説 算数編では、絵や図を用いて数量を表現することや、具体的な場面と結び付けた「式」の指導が重視され、指導例をあげている。

式には、「フレーズ型の式」と「センテンス型の式」があり、それぞれの意味を理解することが「式」のよさを知ることにつながる。しかし、これまで意味の違いを意識した指導は、あまり行われていないように思う。取り上げられるのは「フレーズ型の式」がほとんどで、それも場面の状態を表すことに留まっている。問題解決に必要な「センテンス型の式」が、計算結果として示されるため、式が関係を表すという理解には結び付きにくいのではないだろうか。

3 「式」指導の課題

逆思考を除けば、整数に限らず小数や分数であっても、加法や減法の問題での立式の誤答は、ほぼ無い。しかし、乗法と除法、特に倍数が1より小さい小数や分数の問題になると、誤答や無回答が増えるのが現状である。その原因のひとつは、演算決定の根拠にあると考える。

算数的活動が学習指導要領の内容に加えられる以前から、「具体的活動」や「図に表すこと」が重視され、積極的に取り入れようとした指導が行われてきた。特に、低学年では、具体物や半具体物を用いて繰り返し、丁寧な操作活動が一般的になされている。しかし、手の動きや具体物の移動の仕方、絵や図にかくこと等の活動の有無だけが取り上げられ、最終的に加法や減法が成立する根拠となるのは、操作とは別に、キーワードと称される「来た・増える・多い」(加法)「帰った・減った・少ない」(減法)等の国語的な言語表現である。キーワードを立式の根拠とするのは、中学年で小数や分数に数を拡張し、加法や減法を指導する場合でも同様である。

しかし、逆思考の問題、例えば「3人遊びに来たので、全部で7人になりました。はじめに遊んでいたのは何人ですか。」という問いになると、加法のキーワード「来た」があり、増えた問題なので、式を $3 + 7$ にする児童がいる。 $7 - 3$ と正答した児童がその根拠を説明しようとするが、ほとんどが問題中の言葉をそのまま述べるだけである。言葉だけでの説明では、キーワードを頼りに演算を決めてきた児童の理解には限界があり、正答を納得させるのに指導者が頭を悩ませる場面の一つである。

これは、場面や状態を具体的操作や絵や図で表現してはいるが、それらの活動が「式」での表現に結び付けられていないからである。絵や図での表現を含んだ具体的活動と「式」

とを関連させる指導に弱さがあると考える。

問題解決の手段になる図は、第 2 学年「加法と減法の相互関係」で示され、逆思考の問題で、活用することになっている（②pp. 96－97）。ここで初めて「全体と部分」が問題文の言葉を使って図に書きこまれる。

しかし、実践の場ではテープ図を指導することを目的にしがちで、「式」を 3 量の関係としてとらえる指導は、ほとんど無いに近い。3 量の関係を図に表して、全体が分からない場合が加法、全体が分かっている場合は減法であることを指導すれば、テープ図がかけてなくても、場面を表す絵や図に、問いを含めた問題文の言葉を加えれば、立式の根拠を明確に述べられるだろう。

また、正しく立式できなかった児童に対しても、問題文の数量の関係を絵や図に表し、求める部分がどこなのかを明確にすることにより、誤答の原因に気づくことができると思われる。

乗法と除法においても同様のことがいえる。例えば、乗法の導入部で、（ひとつ分の数）（いくつ分）（全部の数）の 3 要素がどのような関係になっているのかを図（具体的な絵から抽象的な図まで、数直線も含む。以下も同様）でも確認することが必要である。

図をかいたりかかせたりして演算が成り立つことの説明をする指導は多いが、「問い」が、どこに表されているのかを明確に押さえた指導は少ない。

第 1 学年、加法と減法が成り立つ指導の導入部から、場面の状態だけでなく、その結果がどこに現れるのか、部分・部分・全体の関係を意図した指導が必要であると考え。その経験を、乗法や除法が成立する場面に活用することにより、四則演算の特徴が明確になる。それぞれが共通して 3 要素で成り立っていることを、絵や図や具体的操作活動で表現し、求めたい要素がどこになるのかで式が成立することが分かる指導が求められる。

4 乗法・除法を系統としてとらえる

文章問題の演算を決定する根拠として、言語表現を具体的操作や図に変換し、そこからさらに「式」に変換する過程で、3 量に着目させる指導も系統的に考えたいことである。ここでは、算数科で学ぶ内容（教材）の系統性について考察する。

割合の理解に課題があるのは、「割合」そのものが難しいのではなく、乗法導入時点からの系統的な指導の不十分さにあると考える。そこで、「2 量の大きさの関係」という視点から、内容の系統性を振り返る。

昭和 30 年改訂の学習指導要領に明記されているように、割合の指導は、乗法の指導から始まる。

まず「倍概念」の理解を確実にすることが必要である。上述のように倍概念は、第 2 学年乗法の指導で導入され、除法の指導により完成される。しかし、乗法の指導では乗法九九を暗唱することが、除法の指導では「等分除」「包含除」の違いを理解することが

指導の中心と考えられ、「倍概念」の指導はあまり意識されていないのが現状である。

さらには、除法と乗法との関係は、答えを求める手段として乗法九九を使う程度に留まっていることが多く、等分除と包含除を乗法の 3 要素との関連で理解させるに至っていない。その結果、第 3 学年での除法の指導で「倍概念」が十分理解されないまま数が拡張される。第 4 学年から、数が拡張し倍を割合としてみる見方ができなければならない。しかし、それ以前の倍概念の理解が曖昧なままであるため、乗法や除法が成立する根拠よりも、分数や小数の計算の仕方に指導の重点がおかれ、割合が分数や小数になった場合、別の概念のように理解されてしまうのである。割合の理解につなげる比例関係に着目した指導の限界である。

同様に、「単位量」「割合」「百分率」「速さ」それぞれが、児童には別の概念のように理解されているように思われる。それは、学習指導要領の領域から生じる誤解ともとれる。例えば、第 5 学年「単位量当たりの大きさ」第 6 学年「速さ」は「量と測定」、第 5 学年では「割合」が小数の乗法や除法の意味として「数と計算」、「百分率」は「数量関係」の領域に含まれている。いずれも、解説によれば全て 2 量の比較と記述されている。

しかし、指導者は共通する倍概念よりも、「単位量当たり」「基準にする大きさ」「百分率」「道のり」などの言葉そのものの理解を定着させようとする傾向が強い。それぞれは、言葉の違いはあっても「乗法(除法)」が成り立つ根拠は同じであることを理解させる指導への転換が望まれる。

5 まとめ

全国学力学習状況調査や到達度の調査では、常に割合の理解の低さが課題になる。しかし、その他の内容であっても、分数や小数に数が拡張すると演算決定の正答率は下がるのが児童の実態である。演算決定は、解法のパターンとして記憶しているだけで、「式」の理解には結び付いていないのが課題である。このことを以下の実践からも感じた。

12 月上旬、6 年生に演算決定の根拠を話し合う研究授業を実施した。(資料①参照)

問題文が加法と減法を表すものは、すぐに全員が正答となる文と式の組み合わせを見つけた。しかし、問題文が乗法と除法のものは意見が分かれた。問題文と式を正しく組み合わせた 2、3 人の児童が、小数の割り算が成立する根拠を「1 を求めるから割り算」と説明したが、演算が決定できないほとんどの児童は、その説明では納得できず、さらに説明を求めた。説明する児童が交代しても「1 を求める問題だから」と同様の言葉で表現するだけで、1 を求めることがどこでわかるかを説明することができず、授業は平行線のままであった。(この学級は、全国学力学習状況調査の平均値は、国語・算数の A 問題・B 問題ともに全国平均をわずかに上回っている。)

家庭等での学習により、学校よりも先行して学んでいる児童やかなり高度な内容の課題をこなせる児童が増えている。その一方で、さまざまな要因により学習が困難な児童もいて、いわゆる学力の差が開いた状態で授業が行われている。しかし、事前学習が進

んでいる児童が、獲得した知識を活用しているとは考えにくく、知識の蓄積に頼っているように思われる。誤答よりも無答に課題の深刻さがあると考ええる。

算数科では、もっと使える知識を獲得させたい。そのためには、割合の理解には、「関係を表す式の理解」と「倍概念として系統的な指導」という両面から、指導そのものを見直す必要があると考える。

[引用・参考文献等]

- ① 国立教育政策研究所・学習指導要領データベース作成委員会（2013）『学習指導要領データベース』 <https://www.nier.go.jp/guideline/>
 - ② 文部科学省『小学校学習指導要領解説 算数編』（2008）東洋館出版社
- ・ 文部科学省・国立教育政策研究所 『全国学力学習状況調査 小学校 報告書』
 - ・ 市川啓 他(2014)『割合の導入時における比例関係の顕在化に関する一考察』日本数学教育学会誌 第96巻 第4号
 - ・ 『わくわく算数』啓林館

[資料 ①]

2014年11月21日 第6校時 名草小学校6年1組 指導者 前田 敏康教諭 の実践より一部抜粋

3 単元名 どんな式になるのかな？

4 単元目標 図・式・課題をつなげることで、演算決定ができる

7 本時の展開

(1) 目標 図・式・課題をつなげて除法の演算決定をし、その理由を説明することができる。

(3) 展開 (一部抜粋)

学習過程	学習活動と予想	意図と留意点
1 導入	課題1 「どんな〇〇になるのかな？」	・ 課題1と問題文を提示
① Aの壁をぬるのに $\frac{4}{5}L$、Bの壁をぬるのに $\frac{2}{3}L$ のペンキを使いました。両方の壁を塗るのに何Lのペンキをつかいましたか。 ② ペンキが $\frac{4}{5}L$ あります。犬小屋をぬるのに $\frac{2}{3}L$ 使いました。残りは何Lですか。 ③ $\frac{2}{3}L$ で $\frac{4}{5}m^2$ ぬれるペンキがあります。1Lでは何 m^2 ぬれますか。 ④ $\frac{2}{3}L$ のペンキがあります。このペンキは1Lで $\frac{4}{5}m^2$ ぬることができます。何 m^2 ぬれますか。		

2 課題 1 の 内容を知る	課題 1 「どんな式になるのかな？」	・学習課題に見通しをもたせ
	A $4/5+2/3$ B $4/5-2/3$ C $4/5\times 2/3$ D $4/5\div 2/3$ E $2/3\times 4/5$	
3 課題 2 を 知る	課題 2 「③は、どんな式になるのかな？その式になるわけを考えよう。」	・すぐにわかる組み合わせと、その理由（根拠）を言わせることにより、本時の課題を把握させる。
4 個人思考	<予想される考え> ○簡単な数字に置き換えて考える ○数直線で考える ○言葉の式で考える	・考えが滞っている児童には、個別支援として、考え方のヒントを与える。
5 集団思考	○結果の数値から考える	
6 まとめ		・話し合いの内容を結び付け、割り算の根拠となる言葉と数直線に関連させる。

8. 授業実践「反比例」(理科, 数学の院生協同)

(1) 授業内容の検討

小学校において、理科と算数が融合した授業を考えた。初めは自然界に現れるフィボナッチ数列について、毛細管現象の二つのテーマで二回授業をする予定であったが、時間の関係で毛細管現象についてのみの授業になった。

毛細管現象とは、細い管状物体(毛細管)の内側の液体が管の中を上昇(場合によっては下降)する現象である。理論上、管の内径と基準面からの上昇する高さは反比例する。

参考 URL [http:// http://ja.wikipedia.org/wiki/毛細管](http://http://ja.wikipedia.org/wiki/毛細管)

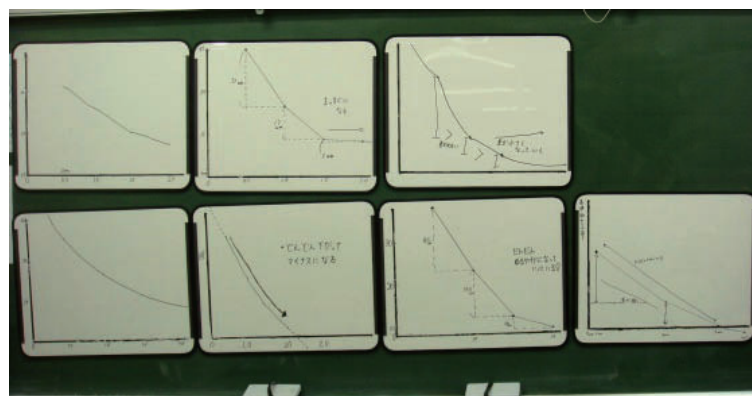
(2) 授業を考える。

理科の授業者と授業を考えていった。毛細管現象を観察することができる器具を使って予備実験を行った。実際測定し計算してみると反比例の関係と言えなくもないが、きれいな関係式を得ることはできなかった。

そこで授業ではこれらの関係がどのようなものか子どもたちに話し合ってもらい授業を考えた。

授業の流れは、子どもたちには自分の考えを他人に伝えることを大切にしてもらいたいという思いから、理科の実験で得られたデータをもとにして自分の考えを言葉で整理して、それらを交換することを考えていた。

自分たちの考えを持って協力校の田辺先生の打ち合わせをしたところ、もう少し授業で何を考えるのかを明確にしたほうが子どもたちも考えやすいという助言をいただいたので、実験で得られたデータをグラフに表し、グラフがどのようなものかを考え、意見交換する授業に切り替えた。



(3) 学習指導案

平成 27 年 2 月 23 日

共同授業指導案

梅本誠也・和田涼太

本時の目標： 実験で得られたデータを整理し、それらの関係を考え、根拠を示して他に伝えることができるようになる。(学習指導要領 6 年生算数的活動に近い。)

準備物： ホワイトボード (第一象限のみの xy 軸付き)、ペン 7 組 (黒赤)

教材観： この授業の前に行っている理科の実験で得られたデータから関係を見つけていくことを授業で扱う。扱うのは毛細管現象と呼ばれるもので、理論上は筒の内径と、基準面からの水の高さは反比例の関係になる。しかし、計測の誤差なども考えられるので実験で得られたデータから反比例の関係を見出すのは難しいであろう。今回私たちが目標として考えているのは、「結果を導くことができる。」というよりは「結果を導くまでの過程を他人に伝えることができるようになる。」というものである。授業中の子どもたちの発言に正解は求めない。むしろいろんな考えが出てくることを期待する。軸からはみ出る直線という子どもがいても構わない。重要と考えるのは、その結果だと考えた過程を自分の言葉で、他人に分かりやすく伝えることができるか、である。一応、授業の最後には反比例の関係になることを伝えて、終える予定ではある。

とにかくしっかりと考えてほしい。

学習指導要領第 6 学年の内容から以下の 2 点の目標を取り上げて授業を組み立てた。

①D(2)比例 「伴って変わる二つの数量の関係を考察することができるようにする。」

②D(4)資料の考察 「資料の平均や散らばりを調べ、統計的に考察したり表現したりすることができるようにする。」

本時の展開：

	児童	指導者
導入 (5 分)	■まずは個別で考える。 ■プリント右上の表を埋める。	■先程の実験で得られたデータについて、考えていきましょう。 ■話し合いをして考えてもらうことを重視する。
展開 (35 分)	■表を見て気付いたことはないか考える。 ■「太いと低い」「規則があるかも」	■班によって値は違うけど、共通する点はあるそう

	■グラフに点を打つ。 (各点はまだ結ばない) ■実験でわかった 4 点以外の部分はどのようなになるか考える。 ■「直線」「曲がっていく」 ■班で話し合いを行い、理由付きで意見をまとめる。 ■発表者の話を聞く。 ■つけたし、意見など	■グラフで考える。 ■曲線は反比例であることも再確認しておく。 ■班活動に移行 ・ホワイトボード、方眼用紙を配る。 ・机間巡視 (10 分) ■発表に移る。 ホワイトボードを黒板に貼り付け、発表する。 ■意見の交換をして、自分達の班と比較する。 (意見が変わっても良い)
まとめ (5 分)		■最後にまとめとして以下を伝える。 ・厳密には反比例のグラフになる。 ・実験結果の数が少ないので、正解を出すのは難しい。しかし本時で大事にしたかったのは、根拠を持って他人に自分の考えを伝えることである。 ・イタリアのボレレが反比例であることを示した。

解説

実際には液面上昇高さ h は次の式で与えられる。

$$h = \frac{2T \cos \theta}{\rho g r}$$

但し、

T = 表面張力

g = 重力加速度

θ = 接触角

r = 管の内径 (半径)

ρ = 液体の密度

である。使用する実験器具は全てガラス、液体は水であるので、管の内径以外の値は定数となり、反比例である。

大学院における授業実践力向上の取組み

— 数学教育専修大学院生による小学校算数授業の試み —

和歌山大学教育学研究科 数学教育専修

片岡 啓・梅本 誠也・和田 涼太

2015年2月13日 受理

はじめに

本稿は、平成26年度文部科学省「総合的な教師力向上のための調査研究事業」において、「教育学研究科・教科教育専攻による教職大学院設置を視野に入れた小学校をフィールドとする教科の枠を超えた理数教育の実践的授業カリキュラムの開発」をテーマに取組んだ内容のうち、主として数学教育専修の担った部分の報告である。

教員養成の高度化に向けて、教科の深い専門性を保証するとともに、実際の授業場面で新たな学びを展開できる実践的な指導力が求められているが、教員養成系修士課程では、個別の教科のみを重視する傾向が指摘されていた。学部卒で入学する修士課程院生の多くは教員志望であるが、これまで学校と連携した実践的科目は十分提供されてこなかった。そこで、本事業では大学教員が専攻の大学院生と小学校をフィールドとして、小学校の教員と連携・協働して、主として小学校の理数教育に関する大学院の実践的な授業カリキュラムを開発することを目指した。

本事業は和歌山市立藤戸台小学校の幅広い協力のもとに、教育学研究科における実践力向上のための授業計画の開発を目的として、数学教育分野では大学教員(片岡、北山、西山(尚))、数学教育専修大学院生(1回生梅本、和田)、および藤戸台小学校6年3組担任田辺麻衣子教諭を中心に取組んだ。前期は小学校算数の内容や課題の基礎的な学習とともに、学校現場での授業見学、後期は院生による授業実践のための教材作成とその試行が中心であった。主な取組は以下のとおりである。

平成26年4月15日(火)

藤戸台小学校との打合せ会

平成26年5月21日(水)

6年3組授業見学「分数の乗除」

平成26年5月28日(水)

講義「和歌山における算数教育の課題」(山本紀代氏)

平成26年6月24日(火)

6年3組授業見学「比とその利用」

平成26年7月8日(火)

6年3組授業見学「速さの意味」(和歌山市算

数教育研究会「量と測定」部会を兼ねる)

平成26年11月10日(月)

6年3組授業見学「直方体の体積」

平成26年12月8日(月)

授業内容の打合せ

平成26年12月11日(木)

授業実践「チューリップ問題」(梅本)

平成26年12月16日(火)

授業実践「面積が変わる秘密を探ろう」(和田)

平成27年1月14日(水)

講義「割合」の理解と演算決定」(山本紀代氏)

平成27年2月23日(月)

授業実践「反比例」(理科、数学の院生協同)

1. 授業実践の概要

「平成26年度全国学力・学習状況調査の調査結果を踏まえた指導の改善・充実に向けた説明会資料 小学校算数」¹⁾では、なお課題のある部分の特徴として、「特徴2：図を観察して数量の関係を理解したり、数量の関係を表現している図を解釈したりすること」、「特徴3：量の大小関係を比較する際に、根拠となる事柄を過不足なく示し、判断の理由を説明すること」を挙げている。これらの課題に少しでも対応する内容で、通常授業の一部ではなく、いわば「投げ込み」となる教材を、後期の初めから検討した。話題に上った分野は、比例・反比例、場合の数、統計、立体(体積)、円の面積など多岐にわたるとともに、不等式を活用した論理に関するものや、ゲームとフィボナッチ数列に関連付けた実践²⁾など、6年生に実践可能でやや発展的なものも含まれた。

その結果実践に臨む課題として次の二つを設定した。

(1) チューリップ問題

(2) 面積のはかり方と表し方

(1)は、色や形の違う4つのチューリップの持ち主を、持ち主4人の発言から推論する問題で、教育出版『算数6下』(平成23年)のp.86にある「だれのチューリップかわかるかな」をもとにしたものである。「量の大小」ではないものの、上記の「特徴3」にある「根拠となる事柄を過不足なく示し、判断の理由を説明する」ことを中心的な目的としている。教科書にある問いの4種類のチューリップの配置を変えると、4人の発言だ

けでは持ち主を特定できないケースが生じることを用いて、子どもたちにより深く考えさせる課題を作ろうという試みである。特定できない場合に「つけたし」という追加情報によって特定できるようにする展開を用意する。

(2)は図1のように $8 \times 8 = 64\text{cm}^2$ の正方形が $13 \times 5 = 65\text{cm}^2$ に「等積変形」されるという不思議な現象を取り上げている(啓林館『わくわく算数5下』(平成23年)の裏表紙)。

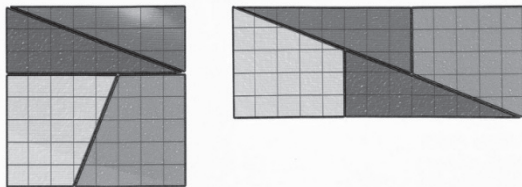


図1

ここには正方形の切り方に関する特徴があり、そこから、より大きな(小さな)正方形でも同様の現象を確認することができる。その現象の起こる正方形や、切断する長さは、驚いたことにフィボナッチ数列にも関連している。上記の「特徴2」にある図の観察と数量関係の把握に対応する課題であるとともに、「特徴3」の根拠の探究や判断理由の説明にも位置付けることができる。

以下は、それぞれの実践に関する詳細である。

2. チューリップ問題

(1) この教材ができるまでの過程

教育出版の6年生の教科書に掲載されていた題材を基に考えた。そこに書かれていた内容は、それぞれの発言からチューリップの持ち主を決定する以下のようなものだった。

チューリップは左から黄、白、赤、つぼみが並んでいる。図2では、たくやの発言から、たくやがつぼみであることが分かる。たくやのとなりがゆみなので、赤がゆみのものであることが分かる。残った色は白か黄のいずれかで、みきは白ではないので、みきは黄であることが分かる。

この題材から何か小学校6年生に対する授業で思考力・判断力を育成できる授業はないだろうか考えた。そこで思いついたのが、4人の発言は変えずに、チューリップの並びを変えて考えてみるというものだった。すべての並び替えを考えても24通りなので実際にすべて調べてみた。結果24通りの中には4人の発言のみですべてのチューリップの持ち主が確定しないチューリップの並び方があることが分かった。このチューリップの並び方で子どもたちに考えさせるような授業ができれば有意義ではないかと考え、教材の決定をし

た。

だれのチューリップかわかるかな

① ゆみさん、けんじさん、みきさん、たくやさんの4人が、④から⑦のチューリップを育てています。

だれがどのチューリップを育てているのでしょうか。

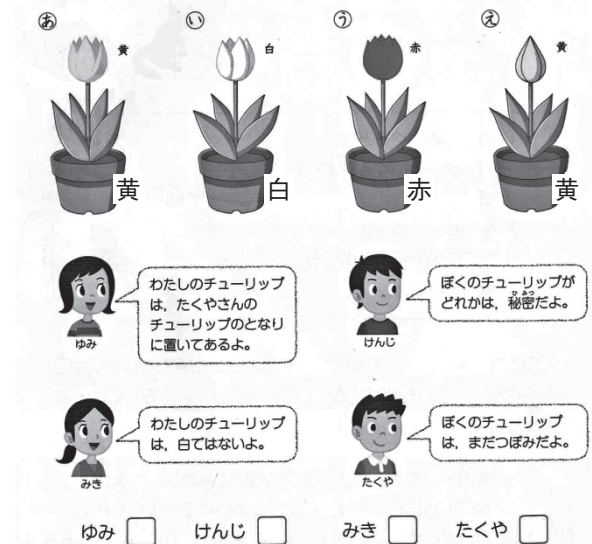


図2

(2) 授業内容を考える

この授業の目標は「具体的な事柄について、起こりうる場合を順序よく整理して調べることができるようになる」である。

授業の構想は以下のとおりである。

① 4人の発言のみですべてのチューリップの持ち主が決定するようなチューリップの並びについて、子どもたちに考えてもらう(図3)。この問題はどの子どもも詰まることなく解くことができるであろうと予想していた。



図3

チューリップ	白	赤	黄	つぼみ
持ち主	けんじ	みき	ゆみ	たくや

② その後に4人の発言だけではすべてのチューリップの持ち主が決定しない問題を考えてもらう(図4)。しばらく考えて、決まらないまま発表してもらいみんなで考えていくことを計画した。持ち主が決定しないので、図3のように持ち主が決定するような新たな条件を付け加える流れに持っていく。この条件をつけ加

えることを「つけたし」と名付ける。



図4

チューリップ	白	黄	つぼみ	赤
持ち主	けんじ	ゆみ・みき	たくや	みき・ゆみ

状況をつかんでもらうために、授業者が3つ「つけたし」の例を出して、考え方を理解してもらう。提示するつけたしは「誰かのとなり」「何色ではない」の2つの形式のものにした。3つの「つけたし」は、次のようにした。

- 1つ目が、ゆみさんが「黄色でない」
- 2つ目が、たくやさんが「ゆみさんのとなり」
- 3つ目が、けんじさんが「ゆみさんのとなり」

実は2つ目のつけたしでは持ち主が決定しないようになっている。

③今度は子どもたちに「つけたし」を考えてもらうのが狙いである。新たに問題が書かれたプリントを配布する。問題に書かれているチューリップの並びは全部で12種類ある。そのうち4種類は図3と同様に4人の発言のみですべてのチューリップの持ち主が決まるようなチューリップの並びになっている（図5）。他の8種類は図4で扱ったような「つけたし」をしないとすべてのチューリップの持ち主が決まらないチューリップの並びになっている。この種類の問題にあたった児童には「つけたし」をするように指示をする。「つけたし」の条件は②で提示したように4人のうちの1人を選び、「誰かのとなり」「何色ではない」のいずれかにするよう指示する。

「つけたし」が必要なプリントにも実は2種類ある。図4のように、4つのチューリップのうち2つのチューリップの持ち主が決まらないものと、4つのう



図5

チューリップ	赤	白	黄	つぼみ
持ち主	みき	けんじ	ゆみ	たくや

ち3つの持ち主が決まらないようになっているものである（図6）。「つけたし」を考えるプリントを解くには15分ほどかかると予想した。

④もし時間に余裕があれば何人かの問題をクラス全員で共有し、算数は計算をするだけではないことを伝える。



図6

チューリップ	黄	白	つぼみ	赤
持ち主	みき・けんじ	ゆみ・けんじ	たくや	ゆみ・みき・けんじ

以上のような流れで授業内容を考えた。図2、図3、図4と同じものは黒板に掲示するために用意していた。4つのチューリップが別々に印刷されたものも用意していた。

（3）実際に授業をする

実際の授業の経過は以下の通りである。

前項の①の部分は自分の構想通りに進めることができた。予想通り子どもたちは特に問題なくすべてのチューリップの持ち主を決定していく。

図4を子どもたちにしばらく考えてもらおうと、図3と違うことに気づいていく子どもが少しずつ出てきた。しばらくしてから、1人の児童を指名して考えを発表してもらった。そうすると考えられる場合である2つが一度に発表された。1つずつ発表されると予想していたので、予想を若干超えていた。

2つの解答が一度に出てきたので、全員にどちらが正しいのかを聞いてみた。全員がどちらも正解であると答えた。ある児童が「どっちかはっきりさせよう」といった発言した。これをきっかけにして「つけたし」をする流れにもっていく。3つの「つけたし」を提示する。「つけたし」ごとにチューリップの持ち主がどうなるのかも子どもたちは理解する。2つ目に当たる、たくやさんが「ゆみさんのとなり」という「つけたし」を提示した場合も、ゆみさんとみきさんのチューリップは決定しないことを子どもたちは問題なく理解した。

図5や図6などが印刷された12種類のプリントを配布する。名前を書いてもらい、プリントの取組方法について説明する。プリントを先に配布したので子どもたちはプリントに夢中だった。プリントの配布と説明

の順番を逆にすべきであった。この時点で授業の残り時間は約15分であった。ここまでの時間配分は予想通りであった。しかしこのプリントをほとんどの子どもたちが5分程度で解いてしまった。早く終わった子どもにも予備のプリントを何枚かは用意していたが、予備の分もなくなってしまった。

そこで1人の児童を指名し全員で一緒に「つけたし」を考えていった。指名した児童のプリントに書かれているチューリップの並びを確認し、黒板にも同じ並びでチューリップの絵を貼る。初めに「つけたし」をしない状態で考えられる持ち主を聞く。その後、どのような「つけたし」をしたのかを聞いた。「つけたし」は「つぼみでもなく、白でもなく、赤でもない。」であった。確かに「つけたし」のルールは守っていたが、予想していなかったことが返ってきた。他の児童にも「つけたし」を聞いてみたところ同じような「つけたし」が返ってきた。「つけたし」の条件についての説明が不十分であった。

最後のまとめとして、計算するだけが数学でないことを子どもたちに伝え、プリントの回収をし、授業を終了した。



(4) 授業後の協議会にて

協議会では、今回の授業のプリントはカラーであり次々と違うプリントが出てきて、簡単に解くことができるので子どもたちは考える授業であったという印象よりも、プリントを解くのが楽しい授業であったという印象を受けたのではないかという意見があった。確かに考える過程などの確認はあまり行わずに進んでしまった。授業の目標とはやはずれた内容になってしまった。こちらが目標とすることを、子どもたち全員に十分伝えることができなかった。

またプリントには考え方をメモする欄があるのに、授業中にはほとんどそのメモを発表する機会を作ることが忘れてしまっていたことも反省点である。これを初めのプリントから取り入れて、自分の考えの順番をしっかりと発表させ、考えの順番の確認をしておくこと目標に更に近づいた授業ができたのではないかと思う。子どもたちが頭の中で考えていることをよりいっそう言語化し、他の子どもに伝える機会が自然とできる授

業になる。

反省点以外にもこの教材を使った授業は他にも方法があることも議題になった。自分が持ち主を決めるために、自分で「つけたし」を考えてすべてのチューリップの持ち主が決まるようにしたので、子どもたちが考えたつけたしは簡単なものが多くなった。

自分が解くためではなく、子どもたちが自分で問題を作る設定にすると、「つけたし」は誰かが自分の問題を解くためのヒントになる。自然と他の子どもたちを考えさせるような難しいつけたしが更に出てきて、より考えるようになったのではないかというものであった。

また4人の発言は同じなのに、チューリップの並びが違うだけで、つけたしが必要であったり、そうでなかったりするので、その違いについて考えさせても面白いのではないかという案もあった。

授業の経過のところには記載しなかったが、ある子どもが「このチューリップが円形に並んでいればどうなるのだろう」とこぼした。チューリップの並べ方を円形などにすると更に面白い授業ができるかもしれない。

今こうして文章を書きながら、新しい授業の方法を思い浮かんだ。4つのチューリップの持ち主を先に子どもたちに与えて、その持ち主になるようなチューリップの並び方を子どもたち自身に考えさせても面白いかもしれない。

最後に子どもたちから集めたプリントの一部を紹介する。

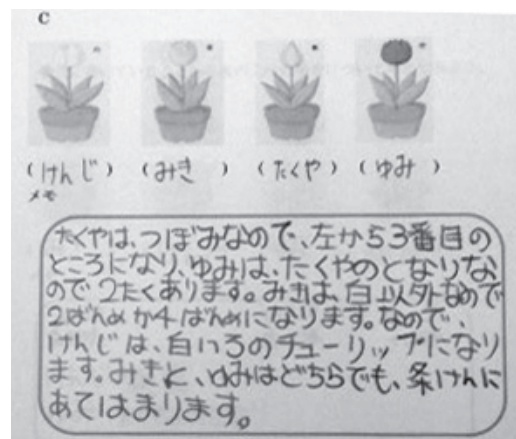


図7

チューリップ	白	黄	つぼみ	赤
--------	---	---	-----	---

図7は2枚目に配布したプリントの「つけたし」をする前の状態のプリントである。しっかり考えの過程も書くことができていて授業の目標を実現できているものになっている。

図8は最後に配布したプリントである。しっかり考えの過程も書いている。「つけたし」もこちらが求めているものになっている。

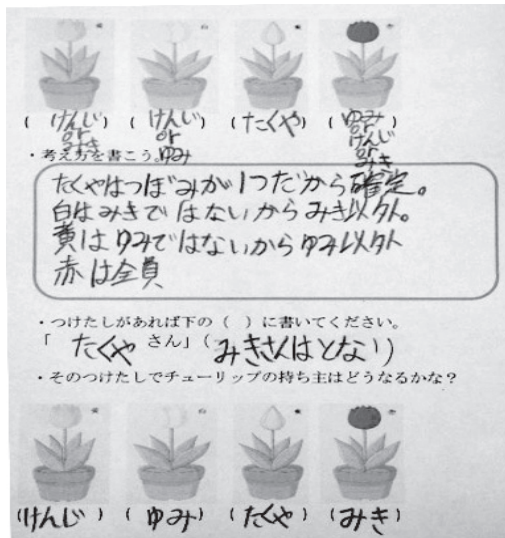


図 8

チューリップ	黄	白	つぼみ	赤
--------	---	---	-----	---

3. 面積のはかり方と表し方

(1) この教材ができるまでの過程

本授業を作ったきっかけは「小学校にてフィボナッチ数列に関連付けた授業作り」であった。フィボナッチ数列とは、0, 1から始まり、隣り合う2つの数を加えると、次の数に等しくなる数列のことである。漸化式は $f_1 = 0, f_2 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ で表され、0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …と並ぶ。啓林館の『わくわく算数5下』の裏表紙に、次の図形が掲載されていた。

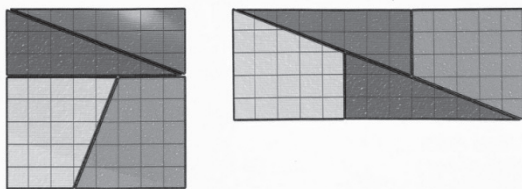


図 9 (図 1 の再掲)

$$[8 \times 8 = 64 \quad 13 \times 5 = 65]$$

この図形はフィボナッチ数列に関連している。今回はこの図形を用いて教材、授業作りを行った。

通常、図形を切り取って形を並び替えただけでは、面積は変わらない(等積変形)。しかし、この場合では、面積に違いが生じるので、本授業でそれを紹介し原因を考察する、という流れにした。

(2) 授業内容を考える

まず、等積変形の概念を思い出すために、一辺10cmの正方形を簡単に変形し面積が等しいことを確認する。

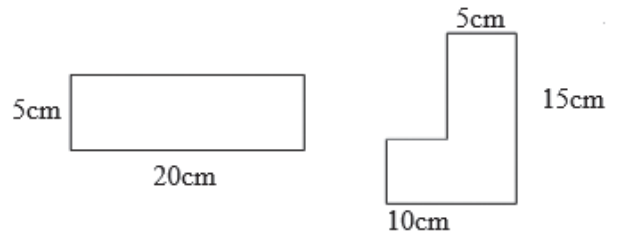


図10

次に、図9のような切り方で変形した場合の面積を比較する。

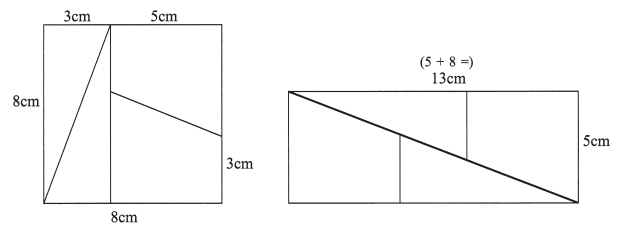


図11

図11左の正方形は一辺が8cmであり、面積は 64cm^2 である。右側の図形は底辺が $(5+8)=13$ 、高さが5であるので、面積は $13 \times 5 = 65\text{cm}^2$ となり、正方形より面積が 1cm^2 大きくなる。この原因を、子どもたちにプリントを配り、各自で実際に切り取って並べて考えさせる。並べてできる図形は真ん中部分に隙間ができる(図12)。この隙間が余計に計算されて面積が 1cm^2 大きくなるのである。

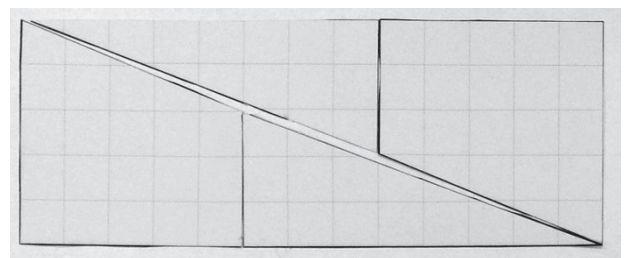


図12

そして、図形の切り方は同じであるが、正方形の一辺を13cmに、切り取った辺の長さを3cmから5cm、5cmから8cmとなるように変更した場合の面積も子どもたちに同様の操作をさせ考察した。正方形は $13 \times 13 = 169\text{cm}^2$ 、並べた図形は $21 \times 8 = 168\text{cm}^2$ となり、今度は正方形の方が1大きくなってしまいます。8cmの場合と違い重なりが生じてしまうので、面積が1減ってしまう結果が出る、というものである(図13)。

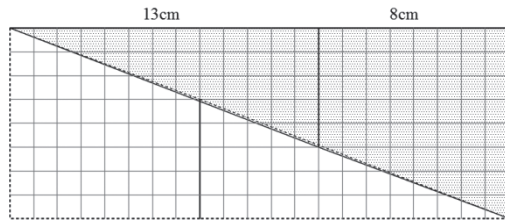


図13 中央部でわずかに重なる

一連の流れに従って、正方形の長さで切り取った辺の長さを並べると、3, 5, 8, 13, 21, …となり、フィボナッチ数列が現れる。そこから次の正方形は21cmだと予想し、更に面積は正方形の方が1小さくなったので、交互に大きくなると予想をしてまとめ、授業を終える。

【図形の解説①】

実は図9の右側の図形は長方形ではない。8cmの正方形の場合は、各辺を図14となるように切り分け、合同な二つずつの直角三角形と台形に分ける。長さが3cmの辺を重なるよう並べると、細長い直角三角形「のようなもの」が2つできる。しかしその「斜辺」が直線では無いので、直角三角形とはならないのである。

さらに、長さが8cmの場合と13cmの場合で違う性質を持つ。

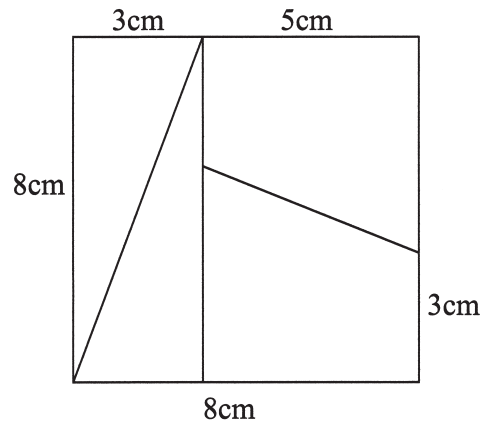
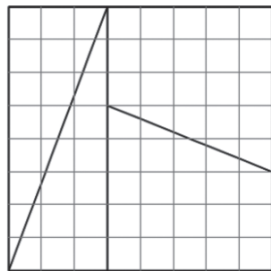


図14

面積が変わる秘密を探ろう！

年 組 名前()

- 一辺が 8cm の正方形で考えよう！

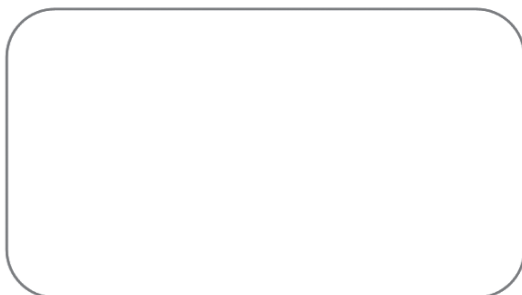


一辺が 8cm の正方形の面積は、

(式)

cm²

- 長方形を貼り付けて、面積も求めてみよう！

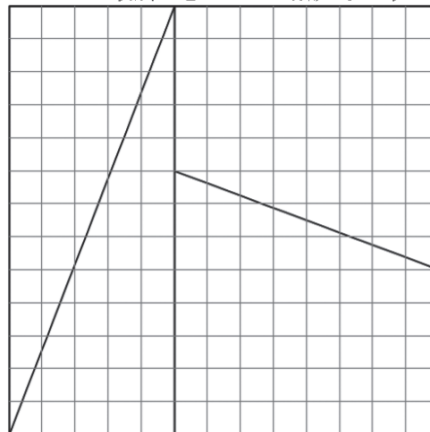


この長方形の面積は、

(式)

cm²

- 次は、一辺が 13cm の正方形で考えよう！



一辺が 13cm の
正方形の面積は、

(式)

cm²

- 長方形を貼り付けて、面積も求めてみよう！

この長方形の面積は、

(式)

cm²

図15 授業で使用したプリント（切り貼り用のプリントも別途配布した。）

図16の①と②の三角形について考察する。

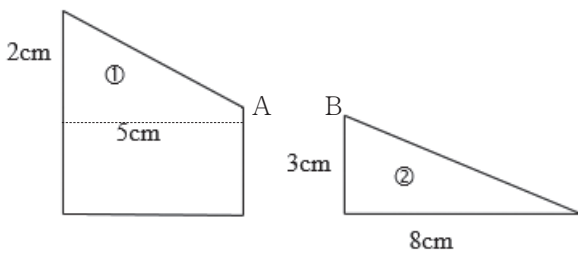


図16

図形①と②の斜辺部分の傾きはそれぞれ異なる。従って直線ではない。①の勾配は約21.8°、②は20.6°となるので、①と②の頂点部分（AとBを合わせた部分）がわずかにへこむ。よって隙間が生じ、長方形の方が面積が大きくなる。13cm四方にした場合、それぞれ①は底辺8cm、高さ3cm、②は底辺13cm、高さ5cmとなるので、①の勾配は約20.6°、②は約21°となり、今度は「出っ張り気味」になる。したがって重なりが生じ、面積は正方形の方が大きくなる。教科書の図9ではわざと枠線を太く描き、隙間を見えなくして直線であるように見せかけているのである。

【図形の解説②】

面積の差が1になり、交互に現れる性質は、正方形の一辺をフィボナッチ数 f_n にし、切り分けた長さを f_{n-1} 、 f_{n-2} (8cmの正方形では5cm、3cm) と定めることで、フィボナッチ数列における次の定理（カッシーニ・シムソンの定理）が成り立つからである。具体的には、

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad (n \geq 0) \text{ のとき、}$$

$$f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n \quad (n \geq 1)$$

というものである。証明を以下に記述する。

数学的帰納法を使う。

(1) $n = 1$ のとき、 $f_0f_2 - f_1^2 = 0 \cdot 1 - 1 = -1$ より成立する。

(2) $n = k$ のとき、すなわち

$$f_{k-1}f_{k+1} - f_k^2 = (-1)^k$$

が成り立つと仮定する。ここで、 $f_{k+2} = f_k + f_{k+1}$ に注意すると、

$$\begin{aligned} f_k f_{k+2} - f_{k+1}^2 &= f_k(f_k + f_{k+1}) - f_{k+1}^2 \\ &= f_k^2 + f_k f_{k+1} - f_{k+1}^2 \\ &= f_k^2 + f_{k+1}(f_k - f_{k+1}) \end{aligned}$$

ここで、 $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ なので、 $f_k - f_{k+1} = -f_{k-1}$ より、

$$\begin{aligned} f_k f_{k+2} - f_{k+1}^2 &= f_k^2 - f_{k+1}f_{k-1} \\ &= -(f_{k+1}f_{k-1} - f_k^2) \\ &= -(-1)^k = (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

したがって(1)(2)より、本定理は証明された。

(3) 実際に授業をして

本授業の導入に等積変形を確認したときに、多くの子ども達が単純な長方形の場合は問題なかった。一方、二つ目に示した図形（図9右）では少し戸惑っていた。多少誘導するように問いかけたので「面積は変わらない、同じ」という意見が多かったが、「見た目は増えてそう」等、疑問視する声も少しばかり見られたのが意外であった。その後、今回の展開に当たる切り方を紹介し、面積を問うと長さを測る事なく「同じ」という返答が返ってきてしまった。その上今度は面積が変わってしまうので、期待していた驚きや興味・関心を引く部分が逆に子供たちを少し混乱させてしまう結果になり、こちらの意図とはやや外れたやりとりになってしまった。等積変形の部分で実際に確認を行い、具体的に計算してから展開に入れば、より効果的にこちらの意思が伝わったであろうと思った。



本授業ではプリントに正方形を切り貼りする作業を多めにとった。適当な時間で切り上げて「顔を上げて」と指示すると素直に応じてくれるが、指示や説明の後に再び糊付けや計算などが待っており、個々で作業のペースも全く違うので、段々についていけない児童も生じたように感じた。始めからグループでの作業にしたほうが、より考えが出やすく、作業の効率も上がると思われる。

全体的に授業自体が「面積の考察」ではなく「図形を切り貼りする」ことに比重がかかってしまったのが、もう少し子供たちの導き方として見直す点だと感じた。また正解の理由を即座に拾ってすぐさま次へ展開していったのも、子どもたちに余裕を与えにくく、むしろ真剣に取り組んでいる子どもを見逃してしまう結果になっていた。より時間的余裕を持って授業の展開を行うべきだと感じた。

今回の授業は視覚的に見つけ辛い点が懸念であったので、画用紙で大きく見立てて示すことで正解を示すこととしたが、この点においてはより正確な図形を示すことのできるデジタル教材を活かすべきだとも感じた。

(4) 授業後の協議会と感想

【協議会にて】

本授業で最も重要な部分の「隙間や重なりが出来る」という点についていくつか指摘があった。切って並べるという操作では隙間に非常に気づきにくい。こちらから教えるよりも、より子ども達が取り組みやすいように、並べるスペースに外枠をつけたり、グループワークにして意見を交換させたりして、見ていてもわかりにくいから自分から試したいという「必然性」が重要であるとの意見を頂いた。

また、面積が違うという原因が「自分の切り方が汚いから」という考えがあり、2枚目、3枚目は非常にていねいに切って確かめようとする子どもがいた。普段の算数においては大体で良いので図を書いて、「計算」することが重要であると教えられている。今回のようにきっちりと並べて、どの部分が「ズレる」のかという点を見出すことは正反対の流れであり、理科の実験などに近い要素である。これらのような、前もって予想している事柄とは大きく外れた事態が起こり得るのかと実感した。

今回の授業ではフィボナッチ数列を利用したが、その数列や規則性については授業の最後にほんの少し言ったのみでほとんど触れなかった。今回の授業も、図形の隙間などよりも、数列の規則性に焦点を当てて、フィボナッチ数列の考察に発展させる等、教材の柔軟性を持たせるのも良いという案もあり、今後の参考になった。

【感想】

小学校で授業を行うのは初めてのことであり、非常に緊張した。自分の中では様々な予想を立てて展開を練ったつもりであったが、子ども達の意見や行動は予想と違うものばかりであり、焦ってしまった。授業中に考えを聞いたときは、様々な意見が出るものと思って臨んでいたら、皆静まり返ってしまい、全く分からない状況に追いやったのかと感じたりもした。実際には、真剣に図形と向き合っている子が多く、また今までと違う概念や見方が入ってきていたので、むしろ時間配分などを無視して、授業の展開の途中で終わるほどゆっくりしたペースにしていた方が良かったのかもしれない。

授業後に子ども達を書いた感想の中には「先生が分かりやすく説明してくれた」「新しいことを知れて良かった」「次も調べてみたい」など、こちらの期待した感想が貰えて非常に嬉しかった。一方で「難しかった」と書いてある感想もあり、全員が理解できるような授業作りを目指したいと思った。

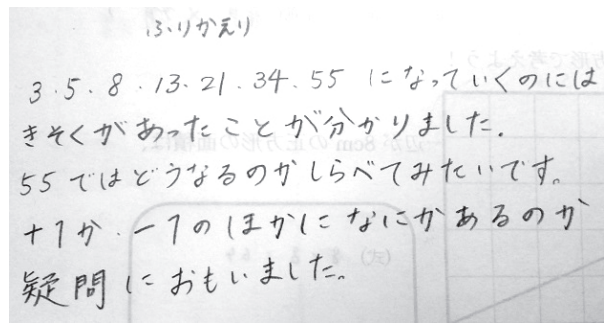


図17

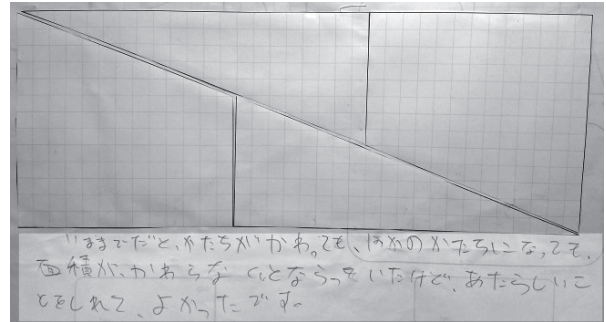


図18

いまままだと、やたらわからなかった。でも、ほかのかたちになっても、面積がかわらないとならっていたけど、あたらしいことをしれて、よかったです。

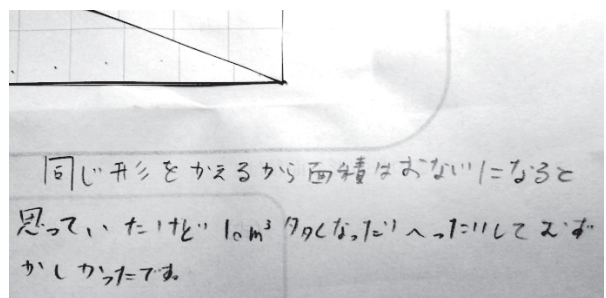


図19

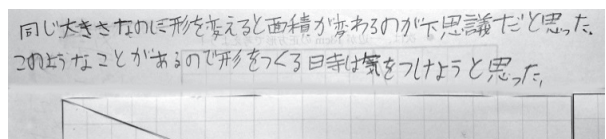


図20

本教材は、小学校以外でも、扱う内容を工夫すれば数学としても活用でき得る教材であるので、機会があればもう一度この教材で授業をしたい。自分の中で思っていたことと違う結果が返ってきたときに、どれぐらい柔軟に調整するべきかを学ぶ良い機会となった。

小学校で授業を行う際や、中学校、高校における数学授業においても、数学的な見方、考え方などの自由な意見を出す機会の重要性を見直し、積極的に取り入れ、生徒自らが自分で「間違っていないから」

意見を出すという点に焦点を当てた授業作りを目指せるようになりたいと強く感じた。

謝辞

筆者らは教員免許は取得していますが中学校と高等学校の数学の免許であり、実習でも小学校で授業する機会はありませんでした。今回このような貴重な機会を設けていただき協議会でも貴重な御意見を頂きました。田辺麻衣子先生、山本紀代先生に感謝します。

注

- 1) 文部科学省：<http://www.nier.go.jp/kaihatsu/26setsumeikai/index.html>
- 2) 富倉亮, 石渡哲哉「フィボナッチ数を用いた教材開発とその実践～規則性に着目した理解～」『岐阜数学教育研究』Vol.2, 2003

