平成 28 年 3 月 11 日

小中高算数・数学における統計的方法教育の実効化と教育すべき項目に関する意見

独立行政法人統計センター
椿　広計

１．はじめに：初等中等統計教育への要望の視点

日本学術会議は、2013 年 9 月に、数理科学分野の参照基準を公表し、数理科学を数学、統計学、応用数理の 3 分野とした。この中で、統計的方法が「科学の文法」と呼ばれていることを示し、その重要性、汎用性を指摘している。一方、統計学に関する記述は、経営学分野、経済学分野、政治学分野、社会学分野、地域研究分野、史学分野、地理学分野、心理学分野、生物学分野、人類学分野、地球惑星科学分野といった文理を超えた多くの大学教育の日本学術会議参照基準にも見られるところであった。

このように、統計学の必要性が多くの学問分野や実社会で増大していることを受けて、日本学術会議数理科学委員会統計学分野の参照基準検討分科会は、2015 年 12 月に「大学教育の分野別質保証のための教育課程編成上の参照基準－統計学分野」を公表した。この中で、統計学は、「データをもとに現象を記述し、現象のモデルを構築し知識を獲得するための方法論」として定義され、「自然や人間社会における不確実性の理解とそれへの対処方法の習得、課題解決型思考力の獲得」と統計学を学ぶことの意義を位置づけている。具体的に獲得すべき能力として、

１）データに基づく定量的・論理的な推論
２）１）を踏まえたリスクを考慮した最適な意思決定
３）問題設定能力
４）抽象的思考能力
５）帰納的／演繹的推論能力

が掲げられている。この参照基準は、大学教育を適用範囲にしたものであるが、その 6 章 1 節は、「市民性の涵養と統計学教育」が示され、

「日本の産業界は、期待値と実測値との差を問題ととらえ、解決の計画を立案し、データを採取し、分析し、解決の結論を得るという統計的課題解決型改善活動を実践してきた。この課題解決（椿注：産業界ではこれを問題解決と呼ぶ）の標準プロセスは、今日**海外でも PPDAC（Problem, Plan, Data, Analysis, Conclusion）サイクルとして初等・中等教育に導入**されている。このように市民が涵養すべき統計的素養は、統計的方法に対する高度な知識ではない。統計的方法を PDCA サイクルや PPDAC サイクルの中で活用し、いざとなったら科学的マネジメントや自律的課題解決を実践できる力量、その前提となる社会に必要なデータの収集に協力し、正確なデータを提供するという精神の涵養である。具体的には、「科学の文法」に即した、物事の相関関係と順序関係を観察・分析し、想像力を発揮して現象に経験法則を与える能力、また、その経験法則の妥当性を批判的に注意深く検討し、必要があれば現象を分類しそれぞれに別の経験法則を与える能力が挙げられる。また、この種の市民能力の前提となる、論理的推論に基づくコミュニケーション能力や ICT を活用したデータ収集・情報処理能力を育む数理科学教育（算数・数学教育）や情報学教育も不可欠である。」

として、初等中等教育への要望を示している。また、7 章は、「生涯学習としての統計学教育体系」にあてられ、初等中等教育、高等教育、社会教育が連携した実践的・反復的学習の必要性を訴えている。

「そもそも、市民レベルでの統計的考え方やデータの批判的な解釈方法は、学士課程前の初等・

中等教育から生涯学習を前提に開始し、高等教育修了後も e-learning 等を活用した社会教育の機会を得て、繰り返し学習するのが望ましい。現代は不確実性が増大している時代であり、市民一人一人が、例えば自分自身の健康状態、所属組織の抱えるリスクについて、データに基づいて判断することが求められている。したがって、統計学を学ぶことは、「生きる力」の育成に強くつながるものである。**初等・中等教育などの早い時期からデータの改ざんや不正な手段でのデータ取得の禁止、公的統計など公共の福利に資するデータの市民としての提供義務、データの分析に基づく合理的意思決定など統計的考え方の基本にふれ、高等教育・社会教育でも必要な統計的倫理観と能力を維持成長させなければならない。**」

とした上で、現状の初等中等数学教育の指導側の問題点を下記のように指摘している。

「一方、**統計学は、演繹的考察により正解が一意に定まる数学とは異なっている。この違いが、特に、初等・中等数学教育における効果的統計学教育を困難にしてきた。**実際、統計学を担当する初等・中等教育教員は、大学において、統計学教育方法は勿論、統計学自体を学んだことがほとんどないのが現状である。したがって、**統計的な考え方、すなわちデータに基づく科学的課題解決プロセスを実践的に教える自信が持てず、統計教育の改善がなかなか進んでいない。**この状況を改善するには、**大学教育学部教員養成課程における統計教育、統計的課題解決教育を充実**するのみならず、現在の教員に対して、教員免許更新時などに効果的な再教育の機会を提供する必要がある。」

筆者は、今回の算数・数学指導要領の改訂が、ICT を活用した、数理的課題解決のプロセスに即した教育となることに強く期待している。図 1 に示すような科学的課題解決の汎用的方法論教育が、欧米同様、算数・数学教育の中により明確に位置付けられたことは高く評価する。しかし、これらの問題は、上記参照基準にあるように、**「正解が一意に定まらない多目的最適化問題」である。アクティブ・ラーニングのような協働的問題解決プロセスの良さが発揮されている Good Practice を収集し、適切な指導方法案を提示**しなければならない。

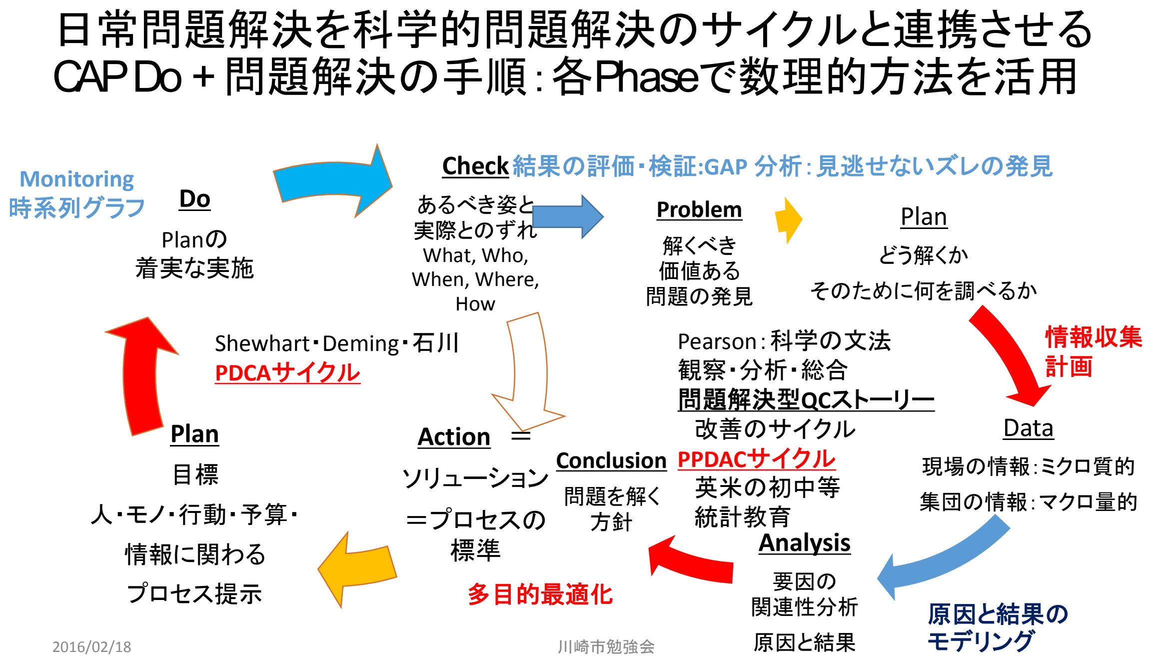

図 1　評価に基づく問題発見と問題解決のサイクル（椿、2015 を教育用に改訂）

算数・数学教育の中で、どのような統計的知識を提供するかは、この種の**問題解決のプロセスの中に、必要な数理的方法、特に統計的方法を配置するという観点から整理**されなければならない。実際、現行学習指導要領で小学校高学年以降に開始される資料収集・分類活動の「目的」は、数理的課題解決のプロセスにそって、より明確に次のように位置づける必要があり、このことは小学校、中学校の総合的な学習の時間や高校の数理探究（仮称）などでも明確に意識される必要がある。

１）問題を発見するための資料収集・分類整理
例：パレート図などによって問題の悪さ加減による順位づけを行う。
２）原因候補と結果との関係性を明らかにするための資料収集・分類整理
例：原因を持っているか否かを表側に、結果が生じたかどうかを表頭にして度数を数え上げ、クロス表を作成する。
３）対策の効果を検証するための資料収集・分類整理
例；対策を行った前後での問題事象の程度や件数を折れ線グラフで示す

これら統計的方法の適用は、資料の活用などの統計的方法と密接に関連する授業項目のみならず、算数・数学全般の全項目との関連性の中で議論する必要がある。また、**新たな統計教育が、統計量の計算方法の習得などに時間をかけることなく、必要な可視化、計算はコンピュータ等の支援の下、アクティブ・ラーニングのよさを発揮して行われる**ことを強く期待する。

２．問題解決に必要な算数・数学的活動への統計的考え方の反映

２．１　数理的課題に対する基本的考え方

２．１．１　数学的課題の評価・発見のための誤差概念導入

問題や課題を数理的に定式化し、「数理的課題」とするためには、**「問題」とは「あるべき姿と現状の姿との差ないしは比で定量的には評価される」**という考え方が明確に導入されなければならない。すなわち、**統計学ないしは計測科学の基本理念である「誤り」や「誤差」あるいは「不確かさ」の評価行為に資する数理的方法**が、生徒の発達に応じて、

１）視覚的表現（グラフによる可視化）
２）数値的表現（記述統計量等による数値的要約）
３）誤りや誤差を含む数理モデルを利用した事象の表現（誤差を持つ事象の定式化）

として、適切な時点で導入されなければならない。

私見では、可能な限り、１）は小学校、２）は中学校、３）は高校の項目とすることを目標とするのが明解と考える。勿論、グラフによる可視化には、「箱ひげ表示」のように統計量に依拠するものもあり、それらは中学校の主要な話題とするのが良い。

２．１．２　原因と結果との分析

誤差概念の導入と同時に、特に数量の関係性に関わる重要な統計項目として、「原因の候補」と「結果」の関係性の分析という問題解決行為がある。数学的な関係性、特に関数関係は原因と結果との関係を表現することに利用される。そしてその関係性には不確かさが存在するということを明確に意識づけなければならない。

しかし、現行の初等中等教育は、小学校教育における数え上げにしても、中高における関数概念にしても、あるべき姿としての「理想型」のみが提示されることが多い。従って、統計教育は、それが事実(データ)とは乖離するということを、理想型に関わる教育終了後、可能な限り早期に、それを補完する算数・数学的活動として提示されるべきである。

２．１．３　選択された行動の評価と最適化

数理的問題解決の結果、あるいは日常的課題解決の結果導かれる対策がどの程度の効果を持つか、従ってどの対策ないしは行動を選択すべきかについての数理的評価方法には様々なものがある。

１）実際に対策を試行してその結果を観察して評価する：**実測評価**
２）対策の結果を数理的に予測し評価する：**予測評価**
３）対策のどれが好ましいか感覚的に評価する：**主観評価**

主観評価は、多数決原理のようなもので対策を評価する行為であり、初等中等教育のコンセンサス形成でよく用いられている。もちろん、個人の判断の背後には、個人個人ごとに表出化されていない予測評価がある可能性は否定できず、小学校教育におけるアクティブ・ラーニングでは、主観評価を少なくとも予測評価にすべく、各生徒の思考を如何に全員が分かるように表現するかといった活動が必要となろう。一方、実測評価行為は数学的活動を超える場合もあるが、客観的確認実験、確認観察の必要性は数学的問題解決活動の中で強調されるべきものである。

いずれにせよ、高校終了時までには、この種の行動とそれに伴う結果について、事象に不確かさがあるとの前提での統計的推論・確率的意思決定の基礎を習得する必要があると考える。

例えば、不確かな事象に対する行動の損失の期待値を計算し、期待損失を最小化する行動を選択するといった数理的意思決定を高校教育における確率・統計学習の一つの目標として設定すべきである。

３．　小学校算数教育に必要な統計的活動

３．１　誤り・誤差の考え方と近似の利用の明確化

既に述べたように、数え上げや計算は正確であるべきという教育が基本であることを認めたうえで、ただ、正解・不正解として評価するだけではなく、そこには誤りや誤差があるということをより明確に意識させることが、科学的問題解決に資する統計的ものの見方である。また、**厳密性を過度に追究せず、ある水準の誤差を許容した行動、数理的近似に基づく行動が、便利であり必要**であるということについても、学年進行に応じて理解させる必要がある。

３．１．１　数え上げ、引き算と割り算における統計的問題評価活動

小学１年には、「ものとものとを対応させることによって個数を比べること，個数や順番を正しく数えたり、表したりすること」という項目がある。この項目は、小学1年の「資料の整理と読み」における「ものの個数の絵や図などを用いた表現とその読みについて指導する。」と一体化した教育とする必要がある。

一方、その学習の中で、**「の」の字テスト**が狙っているように数え上げにおいて、正しく数えられないで誤りが発生すること、ものとものとを正しく対応させられないことが生じること、これが日常的に起きる「問題」であるという意識づけがなされなければならない。意図せずに「誤り」を起こすことは、本人の資質や道徳上の問題として非難することなく、個人や集団が自律的に改善すべき問題発見のよい機会であると位置づけ、隠すことなく科学的（数理的）に問題を解決すべき対象とすべきという教育がなされるべきである。

小学１年、2 年では、減法の学習における「問題評価」活動が可能である。例えば、「つり銭」の計算を通じて、「支払うべき金額と実際に支払う額との差」を示し、60 円のものを買うのに 100 円と 1 万円を持っていたら、100 円を出す方が「問題」が少ないということを議論する。工作などで無駄に材料を使わないという活動自体が、算数的活動であることを意識づける必要がある。

小学 3 年以上ともなれば、割り算における「問題評価」活動も可能となる。例えば、5 分を 5 分 10 秒とする砂時計と 4 分 55 秒とする砂時計の問題を誤差や誤差率で評価するなどの算数活動が統計・確率の扱うべき「問題」の有用な導入となりえる。残念ながら小学校の算数活動では、

負の数を扱うことができないが、時計が進むとか遅れるという概念の中で負の誤差を通じて負の数の必要性に気づかせてもよい。

３．１．２　分類と問題の数理的発見：パレート図の導入

小学２年で「同じ大きさの集まりにまとめて数えたり，分類して数えたりすること」という項目がある。この「分類」を通じた数え上げについては、全く同じ大きさの集まりをまとめる正確な分類だけでなく、ある範囲の大きさのものをあたかも同じ大きさと見なして分類するという統計的活動を通じて、**「ある値とその値に許容される差」の範囲で、事象をひとくくりにする**算数的活動を経験することが重要である。この活動は、まさに正解が一意に定まらない活動であり、アクティブ・ラーニングの対象である、各生徒の考え方の共通性と相違とを確認し、より近似誤差の小さい適切な分類を求めて、合意形成を行うプロセスをアクティブ・ラーニングの中に組み込むのである。

特に、問題事象、すなわち「あるべき姿と乖離している事象」を定性的に定義・分類し、それが日常的にどの程度起きているかを数え上げ、その度数が本来０とならなければならないという観点から問題の悪さ加減を定義するといった算数的問題発見活動がなされなければならない。

この活動の中で、現行「資料の整理と読み」における小学２年「身の回りにある数量の分類整理，簡単な表やグラフを用いた表現とその読みについて指導」、３学年「表や棒グラフを用いた表現とその読み取りについて指導」が実践的に取り上げられる必要がある。特に、問題事象の度数を、その大きさの順に並べた棒グラフ（パレート図）により、問題の悪さ加減を数理的に順序付けるといった活動が必要である（図２）。

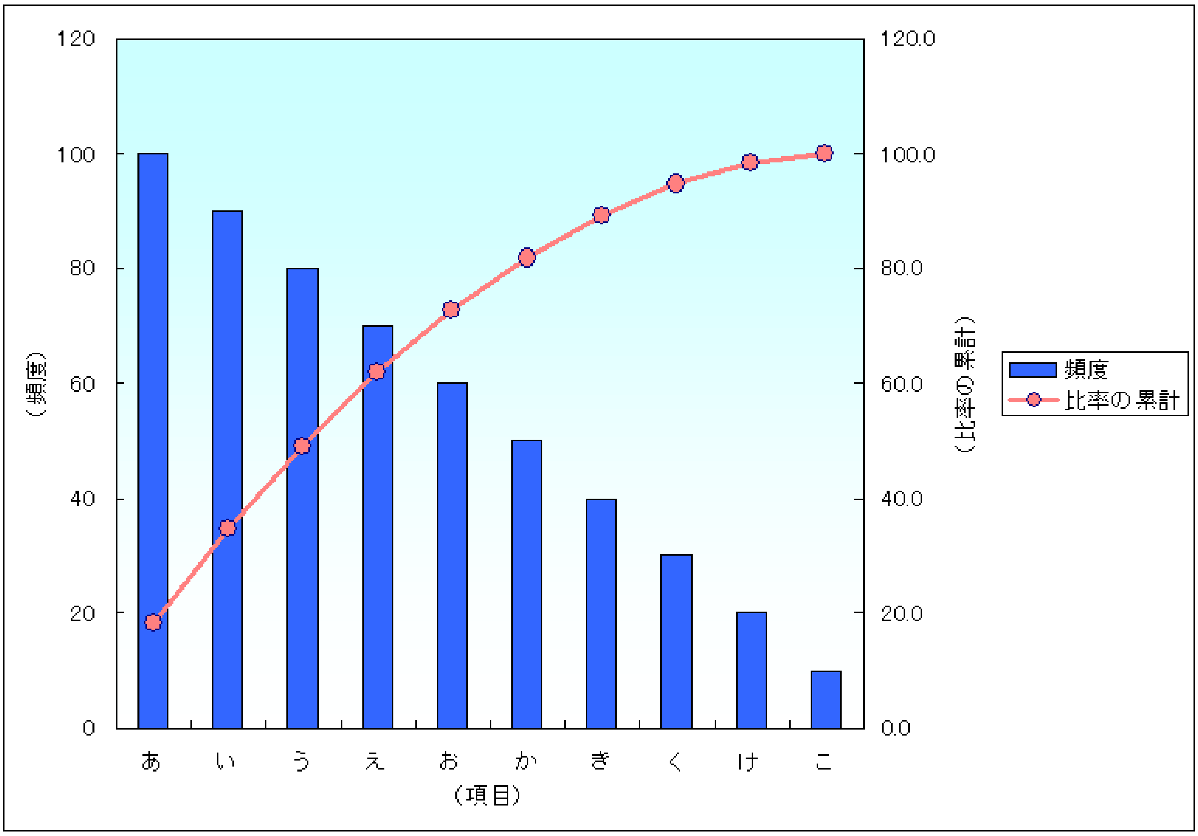

図２　問題発見のツールとしてのパレート図：Wikipedia「パレート図」からの引用

３．１．３　近似誤差の評価

小学校の現行算数では、「第４学年では，概数の意味や，四捨五入などについて指導する。また，目的に応じて四則計算の結果の見積りをすることを指導する。概数や見積りは，第４学年以

降の様々な内容と関連する。」が存在する。これは、かなり明示的に統計的近似を扱う項目である。四捨五入という概数の概念は、分類や近似という統計的操作と密接な関連があることを意識させなければならない。特に、「量と測定」の小学3年での項目である「単位や計器を適切に選んでの測定など」が、四捨五入同様の近似誤差を許容した上で、計器が選択されるということに気付く機会を与えるべきである。

この**概数の四則計算の結果生じる誤差**は、小学校では貴重な数値的誤差評価の活動となる。従って、最悪の場合どの程度誤差を生じるかを評価することが望ましい。

これを**「計算結果の最大値・最小値」、「計算結果の範囲：最大値—最小値」**として区間で示させることが、統計における「最大値-最小値」のような概念を母集団で体験させることになる。

３．１．４　近似分布の評価と最低限の要約統計量の導入

小学5年では、「測定値の平均や，人口密度など単位量当たりの大きさ（異種の二つの量の割合）について指導」が現在掲げられている。誤差評価という意味では、測定値の平均を報告した際に、個々の測定値とは差が生じていることを数理的課題ととらえることが可能である。実際、その差が大きくなって問題がある集団、つまりバラつきの大きい集団とそうでもない集団があることを体得し、中学以降の統計教育の前駆的活動と位置づけることができる。

一方、人口密度も東京都23区のそれぞれの人口密度と23区全体の人口密度とを比較し、平均や密度はどの範囲を対象とするかが問題となり得ることを体験することが可能だが、これを現行小学6年のヒストグラム教育とより密接な関係性を持たせて教育することを提案する。勿論、階級幅が等しければ、密度は度数として通常の棒グラフと同様の表示となるが、連続量の確率分布が、確率密度関数で表現される。**確率密度関数の近似として重要なヒストグラム概念を密度概念の学習と共に学ぶことは、密度概念を効果的に説明する手段としても有用**である。また、ヒストグラムないしは度数分布表の背後にある資料の要約統計量として、**小学5年の量と測定、小学4年の四捨五入に関連して、平均値、最大値、最小値、範囲といった位置とバラつきを示す最小限の統計量を小学6年までに導入**すべきである。

３．２　原因と結果との関係性の分析

３．２．１　時間的順序とクロス集計の明示的導入による因果関係の議論と分析

小学1年の「量と測定」に関わる項目の中で、「量とその測定についての理解の基礎となる経験を豊かにすることをねらいとして，長さ，面積，体積を直接比べることや，身の回りにあるものの大きさを単位として，その幾つ分かで大きさを比べることを指導」が示されていて、量の順序関係を比較する操作を実践的に習得させている。この算数的活動の中で、特に小学2-3年の算数的活動で統計的に重要なのは、**事象を時刻の順番に整理することを通じて、事象には原因となる事象とその結果となる事象が存在することを意識づけ**ることである。特に、時刻の先に起きる事象は後に起きる事象の見かけ上の原因となる場合があるという算数活動を体験する必要がある。

この定性的時系列分析に基づく因果関係の分析の発展として、現行の4年生の「数量関係」における「伴って変わる二つの数量の関係の折れ線グラフを用いた表現と特徴の読み取りについて指導」の中に、時系列間の先行性や遅行性といった因果関係の同定に関わる算数的活動が位置づけられるべきである。

現在の4年の数量関係には、統計的行動として、「目的に応じた資料の収集と分類整理，表や折れ線グラフを用いた表現と特徴を調べることについて指導」とが挙げられている。また，5年にも「簡単な式で表されている数量の関係について指導する。また，百分率についての理解，目的に応じた資料の収集と分類整理，円グラフや帯グラフを用いた表現と特徴を調べることについて指導、目的に応じて表，棒グラフ，折れ線グラフ，円グラフ，帯グラフを選んだり，関連付けて表したり，読み取ったり，判断したりするなど，活用することに取り組む」という項目が挙げられている。4年における、資料の分類整理については、度数のみならず、5年では相対度数（比率）を付す習慣を徹底させることはよいことである。現行指導要領では、小学校5年と中学1年に相対度数の項目が存在するが、相対度数については、可能な限り小学校で繰り返し教育し、中学・高

校の項目における相対度数は、頻度論的「確率」の推定値としての位置づけを強調すべきである。
特に、単純集計以外の小学校4年のクロス集計を小学校5年の「相対度数」で発展させ、総数に対する百分率のみならず、原因をある水準に固定した条件の下で、結果の相対度数がどのようになるかという、高校での条件付確率の考え方の導入に繋がる、**「条件付相対度数」の表示とその条件間の比較**といった算数的活動も重要である。
これらの統計的活動を支える前提として、ある問題を生じさせている原因候補については、どのようなものが考えられるかについての定性的仮説網羅は、典型的な正解の無い問題であり、アクティブ・ラーニングにおけるブレインストーミングのよい課題である。時系列順序の観察や個人の常識、理科・社会の知識を活用して因果仮説を網羅する議論は、算数はもちろん、全科目で試行される必要がある。欧米では、初等中等教育・高等教育・一般研究における定性的因果関係の洗い出しの議論のために、石川馨が提案した**「特性要因図（Fish Bone Chart、Cause and Effect diagram）」が利用されており、わが国でも小学校4年のアクティブ・ラーニングのツールとして算数・数学で教育し全科目に導入する必要**がある（図３）。

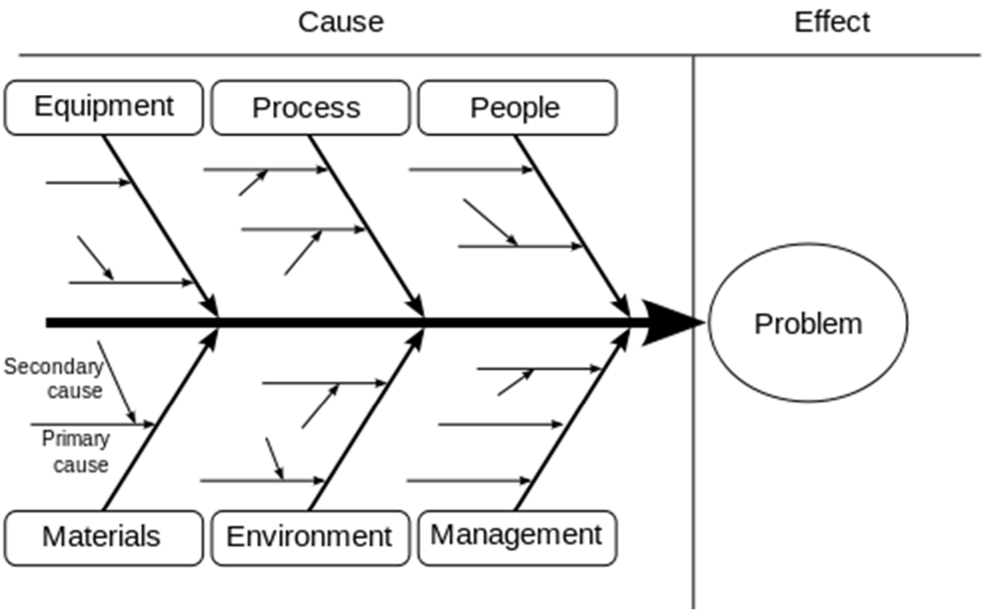

図3　特性要因図：Wikipedia「特性要因図」からの引用

３．２．２　誤差のある数量関係の意識：散布図の明示的導入

小学５年では、「簡単な場合についての比例の関係を表を用いて考察することについて指導する。」、更に、小学６年「比，比例の関係について式，表，グラフを用いて特徴を調べること，比例の関係を用いた問題解決，反比例の関係について指導する。また，a，x などを用いて式に表すことを指導する。また，資料の平均や散らばり，起こり得る場合を順序よく整理して調べることについて指導」が掲げられている。
小学6年で比例関係をグラフで調べるにあたって、実際の観測結果と重ね合わせる、すなわち散布図と数量関係（関数関係）とを同時に可視化し、比較する算数的活動は統計的問題解決活動を導入することが重要であり、望ましい。このために、**現在高校1年の資料の活用に配置されている「散布図」を2変量の分布の可視化ツールとして、小学校6年の項目とする**ことが望ましい。小学校4年で2変量の時系列的折れ線グラフとして調べた2変量の事象を散布図で表し、全体の関係性を議論すると共に、散布図上の点が時間的にどのように動いているかなどを観察し、その特徴を議論させるなどの算数的活動も有用であろう。
散布図という可視化手段の早期導入は、数学的関係性が近似的に成立していることの確認、数学的関係の近似がよいかどうかの直観的判断と共に、その関係性から外れている事象の摘出を通じた問題の抽出・発見など、アクティブ・ラーニングを用いた数学的課題解決のサイクルを小学

校でも一通り経験させることを可能にするという意味でも重要である。

なお、誤差のある比例関係については、例えばGilchrist(1984)”Statistical Modelling,” Wileyの中に統計教育教材として紹介されているランダムな20地点の直線距離と道なり距離との関係などの例題を学校から自宅までの距離などで置き換えることによって、容易に教材化することができる。

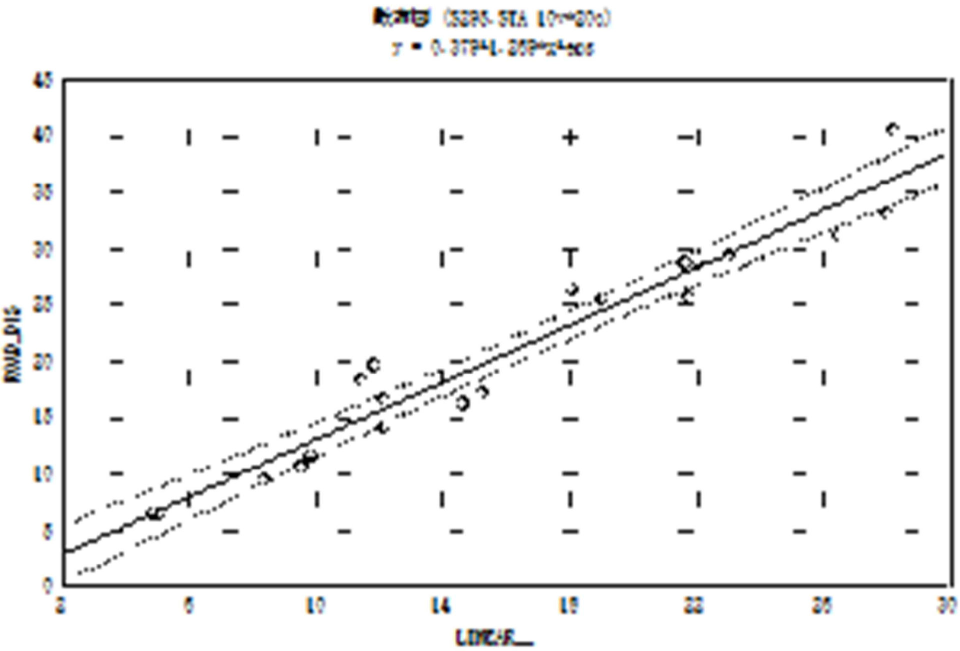

図４　誤差のある比例関係

４．中学数学教育に必要な統計的活動

４．１　現状の問題を評価する統計的活動

４．１．１　正負の誤差と偏り

中学1年で、負の数が導入されることと連携して、誤差に正負があること、**誤差の平均と実際のあるべき値（目標値）との差である「偏り(bias)」の概念を導入**することが重要である。ここでも正の偏りと負の偏りが存在することを日常的事象で明確にすることが望ましい。また、**課題の数学化の典型として偏りが大きいことを上げる**ことが必要である。

４．１．２　不確かさの記述モデルとしての近似確率分布と問題点抽出支援ツール

中学2年で導入される確率については、不確定な事象として、サイコロなど偶然変動が主要な事象だけでなく、一定の関数で系統的変動が支配されている現象に含まれる誤差変動の記述のためにも用いられることを明確にし、その種の数学的活動の学習機会を意図的に設けなければならない。

特に、場合の数や組み合わせから導かれる「論理確率（数学的確率）」的例題に加えて、確率的気象予測のような「将来事象に関わる確率（統計的確率）」とその現象が生じたときの損失や利得に基づく、期待利得、期待損失計算などのリスク評価に関わる**「期待値の評価」といった項目を中学2年時に導入**すべきである。特に、検査を行って、陰性となった場合や陽性となった場合とで、実際に病気である確率が変わるなど、**現在数学Ａの項目となっている「条件付確率」も中学2年の項目とし、条件によって期待利得が異なることを比較するといった数学的活動**を行うことが重要である。

また、統計的確率分布を連続分布に拡張するために、図４に示したような関係式から得られる**予測値と実測値との差（誤差の推定値）である「残差」概念を導入**し、**残差の度数分布やヒスト**

グラムが、偶然変動を表現する確率分布の近似（推定）となっていることも示唆すべきである。これを通じて、残差がある区間に入る相対頻度など、それがどの程度大きいのか、少ないのかといった、統計的推論の前駆となる数学的活動も可能となる。

また、これら残差分布の変動の中にも、「外れ値」に代表されるような未知の系統変動成分が含まれており、それを突き止め、何らかの手を打つことが数理的課題解決におけるＰＤＣＡサイクルを実現することであるという実践的学習を配置することが望ましい。

一方、この種の外れ値や分布の裾、中心に関わる中学2年時の実践的活動を支援するために、確率導入前の**中学1年時に資料や度数分布からその中央値、最頻値、四分位点などを求めるとともに、ヒストグラムによる分布形の特徴抽出や「外れ値」の摘出操作ができるようにしておくべきである。また、中央値、平均値、四分位点、最大値、最小値といった分布の数値による要約を中学1年で行うことに伴い、現在高校1年の「資料の活用」に含まれている「箱ひげ図」は、中学1年の教材として、小学校以来のグラフ表示と要約統計量の中間領域に位置づけるのが望ましい。**

中学3年で平方根計算が可能となる段階で、分布のバラつきの尺度としての「標準偏差」を平均値からの残差の二乗平均である「分散」の平方根という概念で導入するのが良い。これまでのグラフによる分布のばらつきの視覚化と標準偏差というバラつきの数値的要約の間にどのような関係があるかについては、幾つかのデータの例を示す必要がある。また、**課題の数学化として、偏りが大きいこと以外にバラつきが大きいこともあげられることを示す**必要がある。

これによって、一変量の記述統計量については、中学校教育までで一通り完了することとなる。

４．２　原因と結果とを分析する統計的近似活動と残差の検討

現行の「関数」教育では、中学2年で「具体的な事象の中から二つの数量を取り出し，それらの変化や対応を調べること を通して，一次関数について理解するとともに，関数関係を見いだし表現し考察 する能力を養う。表，式，グラフを相互に関連付けながら，グラフの特徴や変化の割合など関数の理解 を深める」、中学3年で「具体的な事象の中から二つの数量を取り出し，それらの変化や対応を調べること を通して，関数 $y=ax^2$ について理解するとともに，関数関係を見いだし表現し 考察する能力を伸ばす。」などが挙げられている。一次関数、二次関数は数学的概念ではあるが、現実には、**因果関係をある限られた領域で一次関数近似する、その近似が十分でなければ二次関数近似で近似度を上げるという数学的活動**が本来期待されている。

従って、**厳密な意味で関数関係が成立していなくても、近似的に一次関数や二次関数で表される事象に着目し、その関数のグラフと共に、「散布図」として示すような数学的活動**が重要である。例えば、図５は世界の都市の緯度（北緯をプラス、南緯をマイナスとした）を横軸に、各都市の月別平均気温の最大値と最小値との平均値（ミッドレンジ）を縦軸にとった散布図である。

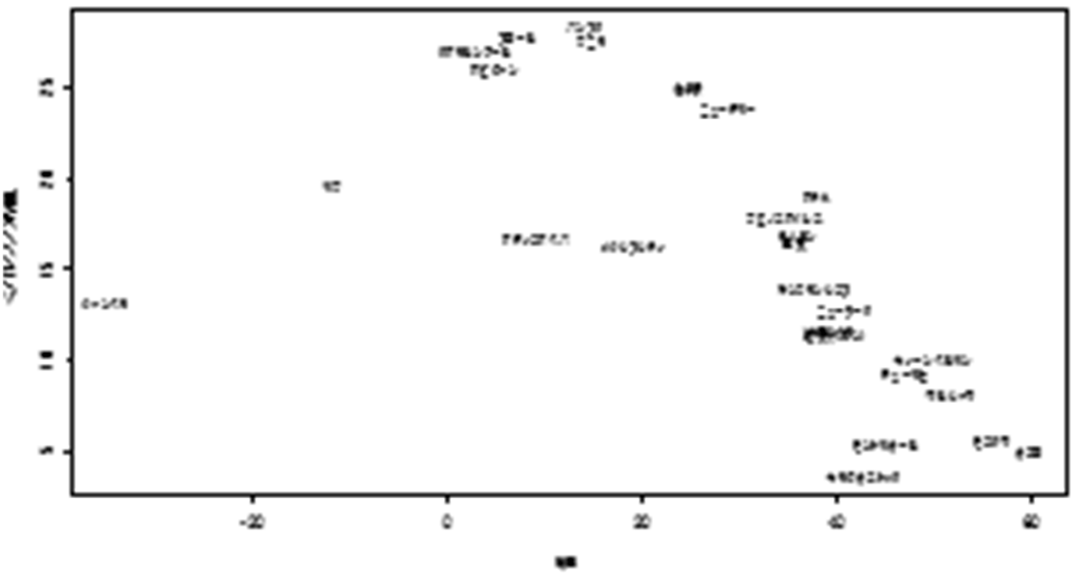

図５　2次式関係で近似される現象（本来は余弦関数で近似される）

このような散布図を用いて、近似的関数関係からの「外れ値」となっていることを「数学的課題」として抽出すれば、残差分布の外れ値となるアディスアベバやメキシコシティが何故外れているかということに対する考察の端緒となり、新たなPPDACサイクルが始動するのである。

４．３　統計的推論、確率的意思決定に関わる項目

現行学習指導要領の中学3年「標本調査の必要性と意味を理解し，簡単な場合について標本調査を 行い，母集団の傾向をとらえ説明する。標本調査に伴う誤りの可能性を定量的に評価することまで取り扱う必要はなく，母集団からその一部を取り出して整理し処理する ことで，全体の傾向を推し量れることを体験的に理解できるようにすることが大切である。また，標本を無作為に抽出することと関連して，第２学年の学習内容を振り返 ることで，確率の必要性と意味を学び直すことができる。」更にそれに付帯した「母集団から標本を抽出する際に必要な乱数を簡単に数多く求めることが必要な場合には，コンピュータを積極的に利用する。また，インターネットなどの情報通信 ネットワークを利用して資料を収集したり，様々な標本調査について調べたりすることも考えられる。」も、今日の統計・確率の応用を考えたとき重要である。

一方、中学1年における「偏り」概念の導入、中学2年での「期待値」概念の導入によって、無作為抽出により構成した標本の平均は、母集団の平均と等しくなり、偏りがないことを理論的にも実践的にも示すことが可能になるので望ましい。一方で、無作為化を経ない標本の平均には偏りがはいることを検証する数学的活動も必要である。

この種の数学的活動は、コンピュータによる「乱数実験」を正式に項目として導入し行うことが望ましい。特に、標本の確率的抽出に限らず、将来の不確かな状況に対して、適当な確率を付与した乱数実験が、事象のシミュレーション（近似）として有用であるという体験は、アクティブ・ラーニングなどの「ゲーム設計活動」として、中学の中で一度は実践されている必要がある。

５．高等学校数学教育における統計的教育

高校においては、関数関係に誤差が加わる、回帰モデルに関するデータ分析を行ったり、関数を用いた予測の性能を相関係数により評価したりする、数理モデルに依拠した統計的活動をアクティブ・ラーニングの下で行う。また、基本的な統計的推論、特に科学的仮説反証の方法論を必

履修化し、これを実際のデータに適用する数学的活動を実践する。

５．１　数学Ⅰにおける統計的内容

高校教育においては、文理を問わず必履修となる現行数学Ⅰの資料の活用において、グラフや一変量の記述統計的項目（箱ひげ図、散布図、標準偏差）を中学までで履修する方針が認められるならば、その発展として２つの項目を補うことがよい。

５．１．１　データの分析とデータからの推論

多くの記述統計的項目の中学への移動に伴い、現行の「データの分析」を「データの分析と推論」に拡大する。

（１）簡単な一次式回帰分析の導入と線形性の視覚的検討や回帰残差の検討

2変量の記述統計的方法論として、現行の相関係数と共に、原因とか投げられるデータから結果と考えられるデータを予測するために、**最小二乗法に基づく単回帰分析が導入され、データから簡単な一次関係式を導けるようにする**ことが望ましい。この際、**原因系変数と結果系変数とを散布図で表し、そもそもその間に一次式関係があるか否かを視覚的に確認する活動**が必要である。場合によっては、原因系変数や結果系変数を適切な関数で変換することで一次式関係が散布図上で明確になるときは、その種の**変数変換を行った変数に対して回帰分析を行う**ことが合理的であるということを検討するのがよい。ここでも、予測値と実測値との差である残差の度数分布としての性質（残差の標準偏差）や外れ値を通じた問題発見活動なども可能ならばアクティブ・ラーニングの中で行うとよい。

特に、この残差の分布の分位点などを調べることで、予測誤差に関する範囲（予測区間）を近似的に導出するといった統計的推論の基礎を学ぶことも重要である。

また、相関係数については、数学Ⅰまでで提示される一次関数、二次関数などを用いて、**入力変数を与えたとき関数による予測値と実際の観測値との相関をコンピュータで計算**し、**関数による予測の性能を評価**するといった数学的活動が有用である。

この種の方法論を数理探究（仮称）などアクティブ・ラーニングに活用することで、数学的活動に評価の段階を明確に導入することになり、活動にPDCAサイクルが組み込まれることとなる。

（２）統計的仮説検証の論理

現行数1の「数と式」における「集合」において、論証方法としての「背理法」が導入されている。**不確かな背理法に対応する統計確率的方法論として、ある仮説を前提にしたとき、ある事象が観察される確率が一定値以下ならば、仮定した仮説を誤っていたとみなして棄却するという、「仮説検定」の考え方を導入**する。数学Ⅰの段階では、取り扱う事象は離散的なものとする。コインが、表が出るか裏がでるか等確率だという仮説の下で、何回中何回以上表がでたらコインは偏っていると判断すべきかといった、例題を中心に背理法の不確かさがある場合の拡張としての「仮説検定」を取り扱う。この仮説検定教育を可能にするために、**現行数学Ｂの「二項分布」を数学Ⅰの項目とする。**

５．２　理科系における統計的項目

５．２．１　数学Ⅱにおける統計的活動の導入：両対数変換後の一次関数

指数関数、対数関数についても、グラフと実データの散布図についての数学的活動を行う。特に、原因系変数、結果系変数を共に対数変換した時に、グラフが一次式となる**「対数一次式関係」**とよばれる現象に注目し、それが特別な場合として比例関係を含むと共に、数学Ⅰで学んだ回帰分析が適用可能なことを学ぶ。

５．２．２　数学Ａ「場合の数と確率　」に「確率的意思決定」、「確率の推定」追加

現行数学Ａの確率は、離散的現象の数学的確率（論理確率）を中心に構成されている。中学3

年の標本抽出などに繋がる確率評価などを具体的な活動として、可能な限り現象に即した事例を扱うことがのぞましい。

また、確率の評価のみならず、**「期待損失評価」などのリスク評価に関わる評価手続き**もこの項目の中で扱うのがよく、期待損失最小化行動の選択といった、数理的意思決定に関わる項目を導入できることが望ましい。できれば、意思決定者と不確かな事象を発生させるNatureとのゲームを表現した**「決定木」**を導入して、最適な意思決定を行う簡単な方法を習得することが望ましい。

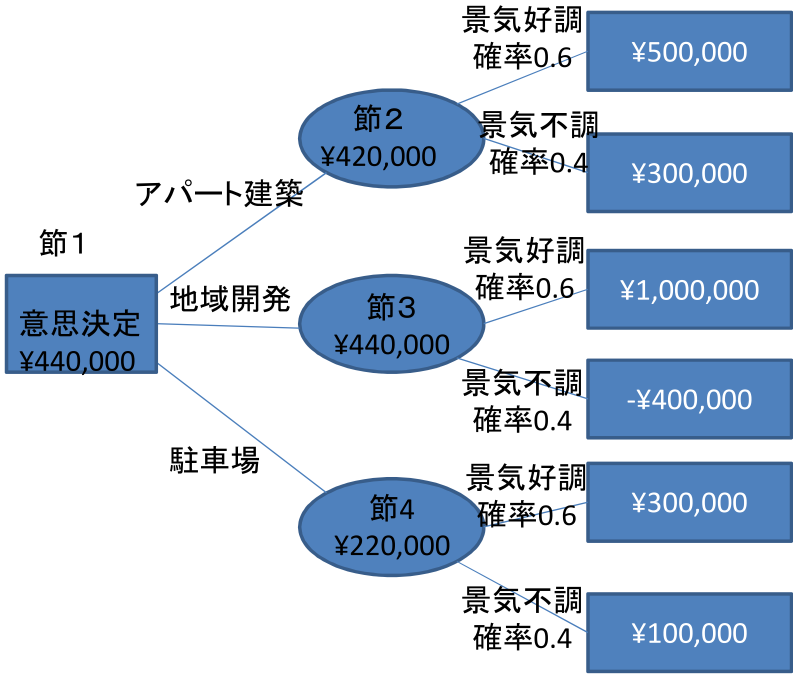

図６　決定木による期待利得最大化意思決定
石黒他(2014)「法廷のための統計リテラシー」朝倉書店よりの引用

一方、数学的確率と数理的問題解決活動に関わる統計的確率（頻度論的確率）とを繋ぐ要素として、**現実に観測された「相対度数」が数学的確率の偏りの無い推定**となっていることを示す項目を追加することが望ましい。また、数学的確率を前提となる仮説としたとき、どの程度の相対度数まではその仮説と反しないかという数学Ｉの「仮説検定」を基にした推論活動を導入することが望ましい。本来は、推定した確率の信頼区間について扱うことが望ましいが、現行の数学Ｂの項目とせざるを得ないように思われる。

５．２．３　現行数学Ｂの「確率分布と統計的な推測」

確率分布として正規分布を取り上げ、**「正規分布による二項分布の近似」**についても扱う。「乱数実験」を通じて、正規分布に従わない確率変数でも、標本平均は、標準偏差が小さくなり、正規分布に近くなることをヒストグラムで視覚的に確かめ、**「大数の法則」や「中心極限定理」が多くの偶然変動を支配していることを乱数実験的に示す**。また、これまでの**正規分布の母平均の推測（検定と区間推定）に、「母平均の比較（差の検定と区間推定）」を追加**することで、高校における数学的活動の範囲を広げる。**「二項確率に関する区間推定」**も正規近似を通じて行う。