

特定の課題に関する調査（論理的な思考）

調査結果

～21世紀グローバル社会における論理的に思考する力の育成を目指して～  
（抜粋）

平成25年3月  
国立教育政策研究所  
教育課程研究センター

2 数学者からみた論理的な思考（P193～198）

数学者の仕事とは数学に関する新しい知見（理論や定理）を見いだすことであり、新しい知見を説明するためには証明を要する。証明とは、約束事や言葉の定義、すでに知られた公式や定理を組み合わせて、示すべき結論が正しいことを論理的に組み上げていく作業である。定理の証明には論理的な正しさが求められることは言うまでもない。では数学者の活動は全て論理を積み上げていく作業であるかということ、案外そうではない。まず理論や定理を見付ける作業がある。その後に証明を見付ける作業がある。そして論理的に証明を記述するのである。

理論や定理を見付ける段階では、まだ正しい証明が完成していないことが普通である。つまり思考実験や実験計算の中から、正しいかどうか分からないものを正しさに違いないと信じるのである。理論や定理を見付けるために「思考実験から得られた法則が正しそうだと感じる直観や経験則」が大切な場合が多い。

続いて証明を見付ける作業は、実は大半が試し計算であり試行錯誤である。見当違いだらけの計算の中から必要で正しい部分を取捨選択し、そこに潜む正しさを論理的に説明しようとする活動なのである。証明を見付けるためには、「多くの試行錯誤の中から、一般的で抽象的な傾向を見いだす力」が大切な場合が多い。

数学者の扱う数学と中等教育における数学とは内容が違うので、数学者の活動と中等教育とは関係ないという意見もあるかもしれない。しかし具体的内容の違いを差し置いても、「数学者がいかに生き生きと数学と対面して論理的な思考をしているか」を知ることが、教育の場においても参考になることが多いのではないかと考えるのである。

(1)何かを見付けるためには探さなければ、何かを探すためには試さなければならない

一般的に、新しい公式を見付けるためには、まず計算実験が必要である。実験的に計算結果を蓄積しそれらを現象として観察し、その中から計算の法則性を見いだすことが定理を見付ける作業である。この場合「経験的によさそう」などと経験として知っている数多くの定理と比較して類推する作業が多く含まれる。この意味では数学者は従来の公式を知

識として数多く知っていることが必要である。このような「計算実験→観察→経験による発見→公式化」という道筋が数学の本来の在り方であり、数学が楽しいのはこういう部分なのである。

中等教育であるならば、教科書の公式を「自分で再発見」することが最も楽しいであろう。もともと公式というものは、数多くの計算を一つの式で表したものである。通常の学習では「公式→理解→計算」という順序で学習するが、時間があれば「計算→観察→公式の再発見」という順序で学習するのが楽しい。ただし計算から公式を再発見するには、多くの場合それまで学習した公式からの類推が必要であり、まったく予備知識が要らないというものでもない。

このことを論理的な思考の枠組みに合わせて説明してみよう。計算実験を観察する作業は、本調査における論理的な活動の分類（以下、「分類」という。）④「事象の関係性について洞察する」ことであり、計算実験から公式を再発見する作業は分類⑤「仮説を立て、検証する」ことそのものである。その際には学習済みの公式からの類推も必要であり、そのためには分類⑥「議論や論証の構造を判断する」が役立つと考えられる。

### (2) 証明を発見するためには試行錯誤の中から共通の性質を抽出する作業が必要

証明を見付ける作業は、数学者にとって中心となるべき活動であり、かつ最も難しい活動でもある。作業手順は一つではないだろうが、典型的な手順は「試行錯誤→共通性質の抽出→論証・記述」である。最初に行うことは証明を見付けるために多くの計算を試すことである。その試行が全て有効とは限らず、無駄なものも多く含まれる。しかしその中から証明に関わる（と思える）部分を抽出し、一般化して考えることにより、証明を記述することができるようになる場合が多い。

中等教育であるならば、自分で再発見した公式を自分で再証明できれば最高である。つまり「計算→観察→公式の再発見→再証明」とプロセスを伸ばすのである。そのためには計算の中の雑多な情報の中から法則性を与えるような部分を自分で抽出する必要がある。様々な計算のうち共通している性質は何か、上手な変形はどれか、それを見極めながら大切な部分を取り出してそれを文字式などで一般化してみることが証明に直結する。

この論証の部分を論理的な思考の枠組みに合わせて説明しよう。試行錯誤の中から証明の道筋を見付けていく作業は分類②「必要な情報を抽出し、分析する」に当たるものであり、実際に見付けた証明を構成し記述するためには分類①「規則、定義、条件等を理解して適用する」作業が必要である。

なお、分類③「趣旨や主張を把握し、評価する」を当てはめようとするならば「自分で証明できた公式の有用さを考えてみる」ということに当たるだろう。

### (3) まとめ

「計算実験→観察→経験による発見→公式化」や「試行錯誤→共通性質の抽出→論証・

記述」という手順が大切なことは分かるが、限られた時間の中でできるだけ多くの証明に取り組むことは無理ではないか、という考え方もあるだろう。確かに限られた時間の中で多くをこなすことは時代の要請であるかもしれない。しかし数学本来の論理的な思考とは、計算実験や試行錯誤を含むこれらの手順を踏まなければいけないものである。無駄な試行錯誤を早く捨てる感性を高めるのは有用かもしれないが、実験や試行を行わないなど手順を短くカットする方法を追求するのは本筋ではない。「幾何学に王道なし」と言ったユークリッドの言葉はそのまま数学全般に当てはまるのである。

#### (4) 「数学者からみた論理的な思考」を生かした授業計画

「計算実験→観察→経験による発見→公式化」や「試行錯誤→共通性質の抽出→論証・記述」などという手順を生かした授業計画を提案する。なお、生徒に発見を促すのには時間がかかり、常にこの方法では進度が遅くなってしまう。しかし重要なのは発見した内容ではなく発見するプロセスを踏ませることである。つまり「面倒な計算→自分で公式を発見→計算の簡素化」という過程を踏むことにより、公式の有用性を実感させることが重要である。したがって、この方法は全ての内容で行うものではなく、効果的と思われるいくつかのものに絞ったほうがよい。また、この授業を行うには教員が「生徒が法則を発見するプロセスのシミュレーション」を十分に準備することが必要である。

ア 試行錯誤・計算実験の時間をとること — 4～6パターンを用意し、4程度のグループで「1人1～2パターン」を調べさせる

試行錯誤・計算実験の時間を設定する。これは長時間である必要はない。目指すべきテーマを与えその計算実験を生徒一人一人にさせる。4人程度のグループを設定し、1つのグループ内では全員が異なる例を実験してみるように試料を与える（試料については後で例示する。）。数分の計算時間を与え、自分の与えられた試料について計算結果を出させる（実験時間の前に、計算方法の復習をすることも大切である。）。このことにより、目指すべき一般的な公式の1つの例を実際に手で触れさせることになる。

イ 観察・考察の時間をとること — 観察は記録に残し、グループ内で集約させる

グループごとに集合し、各自の計算結果をお互いに見せ合い、集約する。グループのうちの1人、2人は計算ができていなかったり計算を間違えていたりするかもしれない。計算ミスが起こり得ることを全員に周知し、グループ内で解決させることが肝要である。計算実験をするためには、最低限の計算能力は必要であるが、グループ活動により計算の弱い生徒をグループ内でカバーさせるように促すことができれば、全員が計算できる場合と同等に進めることができる。

グループごとに議論させて寄せ集めたデータから法則性を見付けさせる。試料の設定を適切にして、すぐに法則が見付けられるように準備することも大切である。このことによ

り、複数の計算例の中に法則（公式）が潜んでいることを実感させる。  
引き続き、その法則が成り立つ理由をグループ内で議論させる。グループごとに1つ又は2つの理由をまとめさせ、用紙に書いて提出させる。ここで、その理由についてグループ全員が納得してから提出させることは大切である。このことにより、グループコミュニケーションを通して法則の成り立つ理由について自主的に考える経験をさせる。

ウ 生徒の意見・発見を優先しながらも、流れを誘導すること

教員はプロジェクターなどを用いて提出されたものから幾つかを選んでクラス全員で共有することにより、生徒から意見を引き出す。このとき、重複を避けることは言うまでもないが、正解に遠いものから順に提示することが一つのコツである。この過程を通して大多数の生徒に「自分が見付けた公式」と実感させることができれば成功である。

こうした後に、定着のために再度問題を解かせることも大切である。計算実験のときよりも計算が楽になったことを実感させるのである。こうすることにより公式のありがたさを理解することになる。

また、誘導した公式を急激に一般化するのはかえって理解を妨げる。少し時間を置いてから、更なる発展を提案するのがよい。

エ 実例1（2次関数  $y = (x - p)^2 + q$  のグラフ）（1時間扱い）

目標：2次関数  $y = (x - p)^2 + q$  のグラフの書き方を見付ける（2次関数  $y = (x - p)^2$  ,  $y = x^2 + q$  のグラフの書き方は未習でよい。その部分を発見させるのである。）。

準備：関数の式から表を作ってグラフを描く方法を思い出しておく。

目標提示：2次関数のグラフをすぐに描く方法を見付けよう。

試料：「  $y = (x - 1)^2 + 1$  」 「  $y = (x - 1)^2 + 2$  」 「  $y = (x - 1)^2 - 1$  」

「  $y = (x - 2)^2 + 1$  」 「  $y = (x - 2)^2 + 2$  」 「  $y = (x - 2)^2 - 1$  」 ( $p = \underline{\quad}$  ,  $q = \underline{\quad}$  とグラフを書くための表も添えておく。 $x$ の範囲は頂点を中心に0.5刻みにしておく。)

$x$	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$y$									

実験：まず、4人程度一組のグループを作り、1つのグループに6種類の試料を配布して、一人1～2枚計算をさせる。実数計算により表を埋めさせ、それをグラフ化する。

集計：グループ内で計算を持ち寄せ、グラフを並べる。間違ったグラフを描く生徒もいるだろうが、そのことは議論を通じてグループ内で訂正するように促す。

議論1：このグラフを観察することにより、グラフの形状や位置と関数の式の間にもどのような法則があるかを生徒に発見させる。想定される法則は「 $p$ が1増えるとグラフは1右へ動く」「頂点の位置が $(p, q)$ と一致している」「グラフの形はどれ

も同じ」など。 $p$ 、 $q$ の符号や大きさと、グラフの位置との関係を細かく報告させることもよいだろう。

議論 2 : 議論に上がった法則が何故成り立つかを考えさせる。 $(x - p)$ という部分の役割

や $+q$ という部分の計算における役割を議論させる（ここで、「平行移動したグラフは $y - q = f(x - p)$ だから」と内容を先取りする生徒もいると考えられるが、その場合には「君が知っているその法則が何故正しいかを議論してください」と議論の輪に差し戻す工夫が必要である。）。

「 $x^2$ を $(x - p)^2$ に変更することによって、表における $x$ の値を $p$ だけずらしたものを考えていること＝左右方向への平行移動」「 $+q$ を追加することにより、 $y$ の値を $q$ だけずらしたものを考えていること＝上下方向への平行移動」に気付ければ成功。特に、 $p$ 、 $q$ の符号と平行移動する向きを、実験によって見付けることができれば、よくある符号の勘違いをすることはなくなる。議論した内容はグループごとに紙にまとめさせて提出（無記名でよい。）。

まとめ : 提出された紙からいくつかを抜き出し、プロジェクターなどを用いてクラス全体に提示し、教員が読み上げながら意見を引き出す。間違った法則・理由を書いたものも教材として取り上げ、みんなで議論しあう。この場合「誤り＝悪い」という方向付けをしないこと。法則を見付けたりその理由を考えたりすることが少しくまくいかなかった、という形で補正するのがよい。

このまとめの中で、必ずしも平行移動に関する一般論まで誘導しなくともよい。展開の中で思い出しながら一般化していけばよい。

展開 : 2次の係数が1でない場合  $(y = a(x - p)^2 + q)$  にはどこがどのように変わる

のか、一般的に  $y = x^2 + bx + c$  や  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフを描くときにはどのような式変形をすればよさそうか、などの問題に取り組む。いずれにしる「グラフの平行移動の法則」の発見を前提に進めていけばよい。

オ 実例 2 (因数定理) (2時間扱い)

目標 : 整式  $f(x)$  に対して、「1次式で割った余り＝代入した値」を見付けさせる。

目標提示 :  $f(x)$  を  $(x - 1)$  で割った余りを素早く見付ける方法を探そう

試料 : 「 $x^3 - 2x^2 + x - 3$  を  $(x - 1)$  で割った余りを求めよ」

「 $x^3 - 2x^2 + 2x - 3$  を  $(x - 1)$  で割った余りを求めよ」

「 $x^3 - 2x^2 + 3x - 3$  を  $(x - 1)$  で割った余りを求めよ」

「 $x^3 - 3x^2 + x - 3$  を  $(x - 1)$  で割った余りを求めよ」

「 $x^3 - 3x^2 + 2x - 3$  を  $(x - 1)$  で割った余りを求めよ」

「 $x^3 - 3x^2 + 3x - 3$  を  $(x - 1)$  で割った余りを求めよ」

計算する内容に規則性をもたせることが重要である。

実験 1 : 4 人程度で一組のグループを作り, 1 つのグループに 6 種類の試料を配布して, 一人当たり 1 ~ 2 枚計算をさせる。筆算で割り算の計算を実際にさせることが重要である。

集計 1 : グループで計算を持ち寄せ, お互いの計算結果をノートに写す。計算できていない生徒の分はグループ内で解決させる。

議論 1 : この結果から  $f(x)$  を  $(x - 1)$  で割った余りについて法則性を見いだせるかをグループ内で議論させる。「6 つの試料に共通する法則であること」を注意する。想定される法則は「係数が 1 違うと余りも 1 違う」「係数が 1 増えると余りも 1 増える」「係数を全部加えると余りになっている」などである。

議論 2 : その理由を数分考えさせた後, グループで討論し結論を出させる。最初自由に議論させ, 「問題が変わると計算の数字のどこが変わってくるか」「整式の除法について何か公式はなかったか」などと発問して思い出させるのがよい。想定される理由は「除法の筆算に出てくる係数が 1 ずれるから」などである。

また, 除法の公式  $f(x) = (x - 1)Q(x) + R$  については教員から提示せずに生徒から引き出せるようにする (なお, この段階では生徒からこの公式の指摘がなければそのまま進めることもあり得る。)。グループごとにいくつかの結論を出させる (無記名でよい。)

まとめ 1 : そのなかから代表的と思われる 2 ~ 3 枚をプロジェクターなどでクラス全体に提示し, 教員が読み上げ生徒から意見を引き出す。誤りを含むものも積極的に取り上げる。この場合「誤り = 悪い」という方向付けをしないこと。どこを直せばよいかを議論したり, 法則を見付けたりその理由を考えたりすることが少しくましくなかった, という形で補正するのがよい。「係数を全部加えると余りになっている」もしくは「 $f(1)$  が余りと等しい」ことを確認する。

練習問題 :  $x - 1$  で割った余りを求めさせる反復問題を 1 ~ 2 題解かせる。計算効率がアップしたことを実感させるのがねらい。

実験 2 : 同じ試料について, 今度は  $(x - 2)$  で割った余りを各自に求めさせる。

集計 2 :  $x - 2$  で割った余りを全員で集計させる。生徒たちは自然と法則性を見付けに行くはずである。

議論 3 : (もし, まとめ 1 で「代入」が指摘されていれば, この議論は省略することができる。) 発見できる法則性をグループ単位で提出させる。想定される法則は「1 次の係数が 1 増えると余りは 2 増える」「2 次の係数が 1 増えると余りは 4 増える」など。ここでできるだけ  $(x - 1)$  で割った時のこと (係数の和が余りになる) と関連付けさせる。なぜ 1 次の係数と 2 次の係数で現象が異なるかを考えさせる。もしこの中から「代入ではないか」という意見を吸い出

せれば成功である。

議論 4 : 見付けた法則がなぜ成り立つかという理由をグループで考えさせて紙にまとめて提出させる。ここで、除法の公式  $f(x) = (x-1)Q(x) + R$  が生徒から提案されていれば、そのことを思い出させながら議論させる。提案されていなければ、「整式の除法について何か公式はなかったか」と再び促して考えさせる。

まとめ 2 : 提出されたものをプロジェクターなどでクラス全体に提示する。最終的に「 $f(x) = (x-2)Q(x) + R$  に  $x = 2$  を代入すると余りが求まる」という意見を生徒から引き出せれば成功。意見が出なければ教員から振ってもよい。生徒はこの問題について議論を通して頭を動かしているのだから、教員からの提案もすんなり理解することが期待できる。

練習問題 :  $x - 2$  の場合について 1 ~ 2 例計算練習を試してみるのがよい。計算効率がアップしたことを実感させるのがねらい。

展開 :  $x - a$  に問題を一般化して練習する、 $f(x)$  が  $x - a$  という因数を持つための条件を考えさせる、 $(x - a)(x - b)$  の形の 2 次式で割ったときの余りの問題に取り組む。いずれにしろ「代入 = 余り」という関係性 (因数定理) について理解されていれば、展開は容易であろう。