行 列 入 門

文部科学省

本教材について

本教材は，行列の基本的な性質を学ぶために作成したものです。

行列については，平成 21 年告示の学習指導要領における新設科目「数学活用」の「社会生活における数理的な考察」の「数学的な表現の工夫」の内容となりました。行列は現代数学の基礎的な内容として様々な場面で活用されているにもかかわらず，繁雑な計算の意味やどのような場面で活用されるのかがわかりにくかったことから，「数学活用」の内容としたものです。ただし，「数学活用」の内容としたことから内容は大綱的に示すことになりました。そこで，専門教科理数科の「理数数学特論」の内容としてはそれ以前のもの（平成 11 年告示の学習指導要領における数学 C の内容）をそのまま残すとともに，高等学校数学を超える内容に興味をもつ生徒には「数学活用」の内容を踏まえ「線型代数学入門」のような学校設定科目を設けて指導することを推奨してきました。

平成 30 年告示の学習指導要領では数学 C を新設し，「数学活用」の各内容を科目の性格に基づいて数学 A，数学 B，数学 C に移行することとしました。行列を含んでいた従前の「数学活用」の「数学的な表現の工夫」の内容は科目の性格から数学 C の内容としました。数学 C で扱われる行列の内容も学習指導要領で考えられている行列の扱いも従前と比べて大きな変更はありません。

今回，AI 人材育成の観点から，大学等におけるデータサイエンス教育と円滑に接続することができるよう学校設定科目等で扱うことが可能な行列の教材として数学 C の「数学的な表現の工夫」の内容も踏まえ，本教材を作成しました。しかし，本教材は，学校設定科目等だけの使用を想定しているわけではなく，行列に興味をもつ生徒が自学自習できるものとしても作成しておりますので，ぜひ本教材の積極的な活用をお願いします。

本教材は３つの章で構成されています。

第１章は，行列や行列の演算の意味がわかりやすく記述されています。例えば，行列の掛け算はどのように行い，どのような意味があるのかが具体的に順を追って記述されているので，既に行列を学んだ人も改めてその意味を確認することができると思います。第２章は，実際に行列が活用される典型的な場面が高等学校の数学の内容を踏まえて記述されています。話題 I と併せて学習すれば，行列の有用性（表現のよさ）が理解できると思います。第３章は，行列の固有値と対角化が取り上げられていますが，少し程度の高い内容となっています。2 行 2 列の行列に限定して扱われているのでわかりやすくはなっていますが，学習に困難を感じるようであれば高校生の段階では第２章までにとどめてもよいと考えます。

本教材が有効に活用されることを切に願っております。

目次

第 1 章　行列

私たちが普段用いる表には，２つの要素にもとづいて作成されているものが多い。例えば次の２つの表は，X さんと Y さんと Z さんの１学期の国語，数学，英語，理科の成績をまとめたものである。これらの場合は，人物と教科２つの要素で表が作成されている。

１学期	国語	数学	英語	理科
X さん	65	82	78	70
Y さん	85	63	90	65
Z さん	76	90	82	85

この表だけでも，12 個の数値が並んでいて，例えば合計や平均を求めるのに，$65+82+78+70$ や $(82+63+90)\div 3$ のように 一つ一つ数を書き表して式を作るのは面倒である。場合によっては，人数や科目数はもっと多いかもしれない。

さらに，２学期の成績も考えられる。

２学期	国語	数学	英語	理科
X さん	71	86	70	64
Y さん	83	71	82	75
Z さん	76	88	74	85

１学期と２学期の２つの表をもとに成績を比べたり，平均を求めたりすることもあるが，これもまた一つ一つの数値をもとに式を作成するのは面倒である。そんなとき，表のまま操作したり，表の状態でまとめて計算したりするような表記と計算の仕組みがあれば，大変便利である。コンピュータの発達により，誰でも多量の数量を扱える今日，そのような仕組みを知っておくことには意味がある。ここでは，表のような数値の集まりを１つの数学の対象として扱う方法，考え方，計算の表し方と方法を身につけ，それらの応用を考えよう。そのために用いる主な道具の１つがこれから学ぶ「行列」である。

1.1　行列の表し方と名称

1.1.1　行列

　先ほどの 1 学期の表から項目名を除き，これでひとくくりであることを示すため，かっこで囲むと，

$$\begin{pmatrix} 65 & 82 & 78 & 70 \\ 85 & 63 & 90 & 65 \\ 76 & 90 & 82 & 85 \end{pmatrix}$$

となる。このように，数や文字を長方形状に並べて，全体をかっこでくくったものを行列という。今後，行列はアルファベットの大文字を用いて，

$$A = \begin{pmatrix} 65 & 82 & 78 & 70 \\ 85 & 63 & 90 & 65 \\ 76 & 90 & 82 & 85 \end{pmatrix}$$

のように表す。このように一文字で表すことで，12 個の数量をひとまとめにして表す術を獲得したと考えてほしい。数のまとまりを文字でおくことで，表全体の操作を式で表現する可能性が生まれたのである。

例 1.1.　次はいずれも行列である。

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

　行列を構成する特定の部分には名前がついている。行列に並んだ数や文字の一つ一つを行列の**成分**という。行列の成分の横の並びを**行**, 縦の並びを**列**という。行は上から順に第 1 行，第 2 行，... と，列は左から順に第 1 列，第 2 列，... と数える。i 行 j 列にある成分を $(i,\ j)$ 成分という。例えば，

$$A = \begin{pmatrix} 65 & 82 & 78 & 70 \\ 85 & 63 & 90 & 65 \\ 76 & 90 & 82 & 85 \end{pmatrix}$$

には 12 個の成分がある。そして，A の第 2 行は上から 2 番目の行なので，$\begin{pmatrix} 85 & 63 & 90 & 65 \end{pmatrix}$ であり，第 3 列は左から 3 番目の列なので，$\begin{pmatrix} 78 \\ 90 \\ 82 \end{pmatrix}$ になる。行や列も数の並びなので，行列 A の一部の行列と考え，やはりかっこでくくって表す[1]。また，A の 2 行 3 列にある成分は 90 なので，$(2,\ 3)$ 成分は 90 である。

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cccc} \text{第} & \text{第} & \text{第} & \text{第} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ \text{列} & \text{列} & \text{列} & \text{列} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{第 1 行}\rightarrow \\ \text{第 2 行}\rightarrow \\ \text{第 3 行}\rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 65 & 82 & 78 & 70 \\ 85 & 63 & \boxed{90} & 65 \\ 76 & 90 & 82 & 85 \end{pmatrix} \end{array}$$

(2, 3)成分

問 1.1.　行列 A の第 1 行と第 4 列を書け。

---

[1] どちらが「行」でどちらが「列」なのかわからない，という人は漢字を考えることで覚えればよい。「列」という漢字には縦棒が並んでいるが，行列の場合も，縦に並んでいる方が列である。

パソコンで表を作成するときには，縦と横にいくつずつセルが並ぶ表を作るかを指定する。同様に，行列でも行の個数と列の個数が重要になる。例えば，

$$A=\begin{pmatrix}65 & 82 & 78 & 70\\ 85 & 63 & 90 & 65\\ 76 & 90 & 82 & 85\end{pmatrix}$$

であれば，縦に 3 つずつ横に 4 つずつの数値が並んでいるが，これは行が 3 個，列が 4 個あることを表している。このような行列を 3 行 4 列の行列という。一般に，m 個の行と n 個の列からなる行列を，**m 行 n 列の行列**または **$m\times n$ 行列**という。また，この行列の**型**は $m\times n$ であるとも，この行列は **$m\times n$ 型**であるともいう。

例 1.2. 例 1.1 の行列は，左から順に，2×3 型，2×2 型，4×1 型，1×3 型である。

問 1.2. 次の条件を満たす行列の例を 1 つずつ作れ。
(1) 2 行 5 列の行列　　(2) 型が 4×3 の行列

注意. i は虚数単位の意味でも使われるアルファベットである（「虚数」は数学Ⅱで履修）が，行列では，行や列や成分を表すときにしばしば用いられる。

特定の型を持つ行列には，特別な名前がついている。行と列の個数が等しければ，全体の形としては正方形になる。このような行列を**正方行列**という。特に n 行 n 列の行列を **n 次正方行列**という。つまり，n 次正方行列とは一辺に n 個の成分が正方形状に並んだ行列のことである。

例 1.3. $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$ は 2 次正方行列で，$\begin{pmatrix}a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{pmatrix}$ は 3 次正方行列である。

問 1.3. 次の条件を満たす行列の例を 1 つずつ作れ。
(1) 4 次正方行列　　(2) 5 次正方行列

横方向にだけ成分が並んだものも行列と考える。つまり行の個数が 1 である行列である。これを**行ベクトル**という。成分の個数が n 個である行ベクトルを **n 次行ベクトル**という。n 次行ベクトルとは，1 行 n 列の行列のことである。

同様に，縦方向にだけ成分が並んだものも行列と考える。つまり列の個数が 1 である行列である。これを**列ベクトル**という。成分の個数が n 個である列ベクトルを **n 次列ベクトル**という。n 次列ベクトルとは，n 行 1 列の行列のことである。行ベクトルや列ベクトルを総称して，**数ベクトル**という。

例 1.4. (1) $\begin{pmatrix}2 & 4 & 5\end{pmatrix}$ は 3 次行ベクトル，$\begin{pmatrix}a & x & b & y & c\end{pmatrix}$ は 5 次行ベクトルである。
(2) $\begin{pmatrix}0\\ 0\\ a\end{pmatrix}$ は 3 次列ベクトル，$\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{pmatrix}$ は 4 次列ベクトルである。

問 1.4. 次の条件を満たす列ベクトルの例を 1 つずつ作れ。
(1) 2 次列ベクトル　　(2) 5 次列ベクトル

問 1.5. 例 1.1 の行列から，正方行列，行ベクトル，列ベクトルを選べ。

注意. 数ベクトルは単にベクトルということもある。その場合，平面ベクトルや空間ベクトルの成分の考え方を広げたものであるとも考えられる。ただし，４つ以上の成分を持つ数ベクトルを図形的なイメージと特に結びつけて考える必要はない。

注意. 数ベクトルも行列の仲間であるが，独自の用途もあるため，それを表すときには，小文字アルファベットの太字を用いて，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ や $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ などのように表す。
　例えば,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

のように表すのである。

問 1.6. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 & 5 & 1 \\ 10 & -3 & 9 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$とおく。次のものを答えよ。
　(1) 行列 A の型　(2) (1，4)成分　(3) 第２行　(4) 第３列

1.1.2　行列の相等

　ここからは，２つ以上の行列について考える。２つの行列 A, B が同じ型であって，対応するすべての成分が等しいとき，A と B は等しいといい，$A = B$ と書く。

例 1.5. 次の３つの行列を考える。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \end{pmatrix}.$$

このとき，$A = B$ であるための必要十分条件は，$a = 1$，$b = -2$，$c = 3$，$d = 0$ である。ところが，C は A, B のいずれとも型が等しくないので，成分がどのような値をとっても，A, B とは等しくならない。

問 1.7. 次の等式が成り立つように，文字の値をそれぞれ求めよ。
(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$
(2) $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ x+y & 2 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & a+c \\ 0 & x & y \end{pmatrix}$

注意. ２つの行列 A と B が異なるとき，$A \neq B$ と表す。また，行列では大小関係は考えない。

1.2　行列の加法・減法と定数倍

1.2.1　行列の加法

　X さんと Y さんと Z さんの２学期の国語，数学，英語，理科の成績をまとめた表から，行列 B を次のように定める。

$$B = \begin{pmatrix} 71 & 86 & 70 & 64 \\ 83 & 71 & 82 & 75 \\ 76 & 88 & 74 & 85 \end{pmatrix}$$

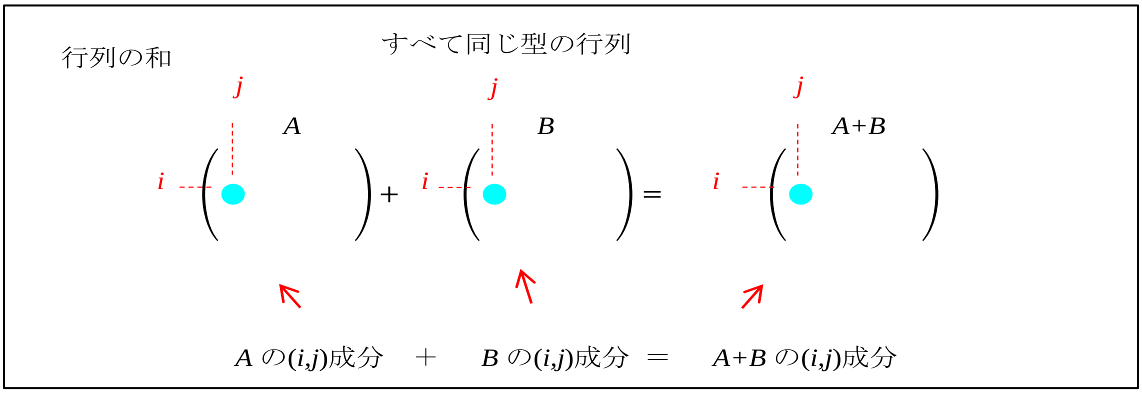
　もし，１学期と２学期の成績の合計を知りたければ，それぞれの表の中に書かれた同じ場所の数値の和を求めればよい。これを，行列を用いて $A + B$ と表すのである。一般には次のように定める。

型が等しい２つの行列 A，B に対して，対応する各成分の和を成分とする行列を $A + B$ と表し，A と B の**和**という。また，和を求める演算を加法という。

この例では，

$$A+B=\begin{pmatrix}65+71 & 82+86 & 78+70 & 70+64\\ 85+83 & 63+71 & 90+82 & 65+75\\ 76+76 & 90+88 & 82+74 & 85+85\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}136 & 168 & 148 & 134\\ 168 & 134 & 172 & 140\\ 152 & 178 & 156 & 170\end{pmatrix}$$

である。



問 1.8.　次の計算をせよ。

(1) $\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -5\\ 1 & 0\end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -3 & -5\\ -2 & -4 & -6\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{1}{6}\\ -\frac{5}{4}\end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix}a & b & c\\ p & q & r\\ x & y & z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a & p & x\\ b & q & y\\ c & r & z\end{pmatrix}$

<u>話し合ってみよう</u>．１学期と２学期の成績の表をもとに，$A+B$ という計算を定めることのよさを話し合ってみよう。

1.2.2　行列の減法

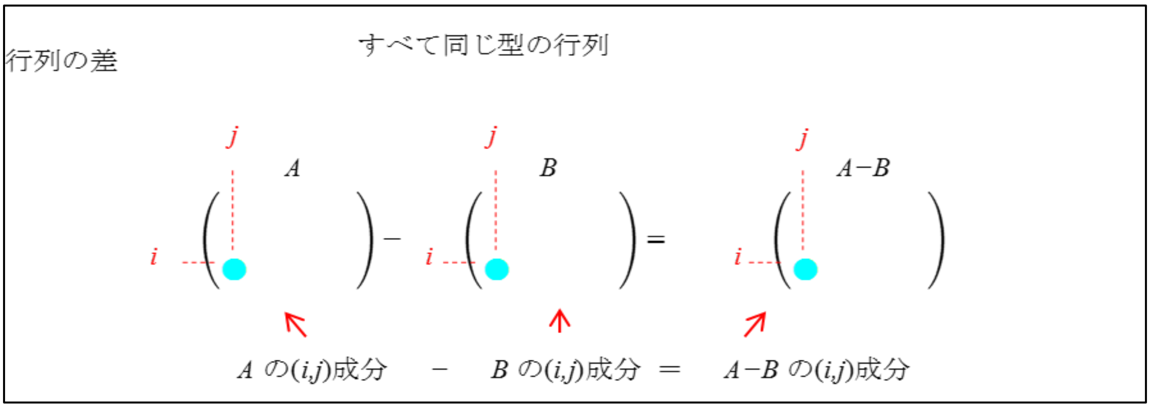
これまでの表をもとに，１学期の成績が２学期の成績と比べてどれだけよかった（上であった）かを知りたいとしよう。それには，１学期の表の中に書かれた各数値から，それと同じ場所の２学期の数値を引けばよい。これを，行列を用いて $A-B$ と表すのである。一般には次のように定める。

型が等しい２つの行列 A，B に対して，対応する各成分の差を成分とする行列を $A-B$ と表し，A と B の**差**という。また，差を求める演算を減法という。

この例では，

$$A-B=\begin{pmatrix}65-71 & 82-86 & 78-70 & 70-64\\ 85-83 & 63-71 & 90-82 & 65-75\\ 76-76 & 90-88 & 82-74 & 85-85\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-6 & -4 & 8 & 6\\ 2 & -8 & 8 & -10\\ 0 & 2 & 8 & 0\end{pmatrix}$$

である。



問 1.9.　次の計算をせよ。

(1) $\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{pmatrix}$

<u>話し合ってみよう</u>.　行列の差を利用できる表計算として，どのようなものがあるか話し合ってみよう。

1.2.3　行列の定数倍

さて，５ページで登場した成績の和を表した行列を，

$$C = \begin{pmatrix} 136 & 168 & 148 & 134 \\ 168 & 134 & 172 & 140 \\ 152 & 178 & 156 & 170 \end{pmatrix}$$

とおこう。これをもとにして，１学期と２学期の各人・各教科について成績の平均を求めることを考えよう。行列 C は１学期と２学期の合計得点の行列なので，それには C のすべての成分を$\frac{1}{2}$倍すればよい。これを，上の行列 C を用いて，$\frac{1}{2}C$ と表すのである。一般に，行列 A と実数 k に対して，A のすべての成分を k 倍して得られる行列を kA と表し，A の k 倍という。この例では，

$$\frac{1}{2}C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot 136 & \frac{1}{2}\cdot 168 & \frac{1}{2}\cdot 148 & \frac{1}{2}\cdot 134 \\ \frac{1}{2}\cdot 168 & \frac{1}{2}\cdot 134 & \frac{1}{2}\cdot 172 & \frac{1}{2}\cdot 140 \\ \frac{1}{2}\cdot 152 & \frac{1}{2}\cdot 178 & \frac{1}{2}\cdot 156 & \frac{1}{2}\cdot 170 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 & 84 & 74 & 67 \\ 84 & 67 & 86 & 70 \\ 76 & 89 & 78 & 85 \end{pmatrix}$$

となる。

問 1.10.　$k\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$となる実数 k の値を求めよ。

すべての成分が 0 である行列を**零行列**といい，その型に関わらず O で表す。ただし，特にすべての成分が 0 である数ベクトルについては，これを**零ベクトル**といい，数字の

0 の太文字を用いて，**0** を用いて表すことが多い。例えば，$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$も$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$もすべて O で表し[2]，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$などは，**0** で表す。

また，行列$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$を 1 倍しても結果は$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$のままである。そして，零行列 O を定数倍しても，O のままである。一般に次が成り立つ。

> どのような行列 A や定数 k に対しても，次が成り立つ。
> $$0A = O,\quad 1A = A,\quad kO = O$$

問 1.11. 上の囲み内の，$1A = A$ を$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$の場合に，$kO = O$ を$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$の場合に確認せよ。

行列 A に対して，$A+X = X+A=O$ を満たす行列 X を$-X$ と表す。例えば，

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\text{のとき}\quad -A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

である。$-A$ は A のすべての成分を(-1)倍した行列となるので，一般に$-A = (-1)A$ が成り立つ。そして，減法は，

$$A - B = A + (-B)$$

とすることで，加法に置き換えられる。

1.2.4　行列の和と定数倍について成り立つ性質

以上で行列の加法・減法と定数倍を導入したが，これらが混ざった計算の場合を考えてみよう。計算は，数の場合と同様に原則として左から行うが，定数倍があるときにはそれを先に行う。また，計算式の途中にかっこ（　）があれば，その中の計算が優先される。すなわち，通常の文字式の計算と同様である。計算法則についても，次のように数の計算の場合と同様のものが成り立つ。

> A，B，C をともに同じ型の行列，O をそれらと同じ型の零行列，k，ℓ を実数とするとき，次が成り立つ。
>
> (1)　(ⅰ) $A + B = B + A$　　（和の交換法則）
> 　　(ⅱ) $(A + B) + C = A + (B + C)$　（和の結合法則）
> 　　(ⅲ) $A + O = O + A = A$
>
> (2)　(ⅰ) $k(\ell A) = (k\ell) A$　　(ⅱ) $(k + \ell)A = kA + \ell A$
> 　　(ⅲ) $k(A + B) = kA + kB$

注意. 上の(1)(ii)により，$(A+B)+C$ と $A+(B+C)$は単に $A+B+C$ と書いてもよく，同様に(2)(i)により，$k(\ell A)$ と $(k\ell)A$ は単に $k\ell A$ と書いてもよいことがわかる。

話し合ってみよう. 教室や仲間で分担して，上の性質を 2 次正方行列の場合に確かめ，互いに説明し合おう。

---

[2] だからといって，$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$のように書くのは間違いである。

例題 1.1. $7\begin{pmatrix}-8 & 0\\-2 & 4\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}12 & 0\\3 & -6\end{pmatrix}$ を計算せよ。

解答. 計算の順序に従って計算すると次のようになる。

$$\begin{aligned}\text{与式} &= \begin{pmatrix}7\cdot(-8) & 7\cdot 0\\7\cdot(-2) & 7\cdot 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\cdot 12 & 5\cdot 0\\5\cdot 3 & 5\cdot(-6)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-56 & 0\\-14 & 28\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}60 & 0\\15 & -30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-56+60 & 0+0\\-14+15 & 28-30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\1 & -2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

別解として，先の計算法則を用いると次のようにもできる。

$$\begin{aligned}\text{与式} &= 7\cdot 2\begin{pmatrix}-4 & 0\\-1 & 2\end{pmatrix}+5\cdot(-3)\begin{pmatrix}-4 & 0\\-1 & 2\end{pmatrix}\\ &= 14\begin{pmatrix}-4 & 0\\-1 & 2\end{pmatrix}-15\begin{pmatrix}-4 & 0\\-1 & 2\end{pmatrix}=(-1)\begin{pmatrix}-4 & 0\\-1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\1 & -2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

問 1.12. 次の計算をせよ。

(1) $-2\cdot 7\begin{pmatrix}-2 & \frac{3}{2} & 0\\1 & -4 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$　　(2) $15\begin{pmatrix}-0.2 & 1\\0.6 & -1.4\end{pmatrix}+20\begin{pmatrix}0.1 & -0.5\\-0.3 & 0.7\end{pmatrix}$

(3) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 4\\-5 & 7\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\8 & -2\end{pmatrix}+\frac{4}{3}\begin{pmatrix}-2 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

問 1.13. 次の等式が成立するように，数 a，b，c，d の値を定めよ。

$$2\begin{pmatrix}a & b\\-2 & c\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2 & b\\d & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c & b\\d & -c\end{pmatrix}.$$

問 1.14. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\-5 & 2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}$のとき，$3A+2X=5B$ をみたす行列 X を求めよ。

1.3　行列の積

1.3.1　行ベクトルに右から列ベクトルをかける計算

1 つ a 円の商品 A を x 個買ったときの代金は，ax 円である。ここでは乗法が用いられ，その式は，

（単価）・（購入個数）＝購入金額

である。

これを複数個にすることを考えてみよう。例えば，次の表のように，3 種類の商品 A，B，C の価格がそれぞれ a 円，b 円，c 円であり，A，B，C をそれぞれ x 個，y 個，z 個ずつ買った場合を考えよう。

商品	A	B	C
単価（円）	a	b	c

商品	購入個数
A	x
B	y
C	z

このときの代金は $ax + by + cz$ 円になる。この計算は，積と和の混合ではあるが，1 つ目の表は単価の表，２つ目の表は購入個数の表であるので，上の式にならって，

（単価の表）・（購入個数の表）＝購入金額

という表記の仕組みがあると便利である。それに応える計算が行列に用意されている。この場合なら，数値の部分だけを数ベクトルとして取り出して，

$$(a \quad b \quad c)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz$$

と表し計算をする。この例は，3 次行ベクトルと 3 次列ベクトルの場合であるが，同じ次数の行ベクトルと列ベクトルの間にも同様の計算の表記を行う。例えば，

$$(10 \quad 20)\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 10 \cdot 5 + 20 \cdot 6 = 170$$

や，

$$(5 \quad 6 \quad -1 \quad -2)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} = 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + (-1)(-7) + (-2) \cdot 8 = 30$$

などのように計算を行う。

一般に n 次行ベクトルに右から n 次列ベクトルをかける計算を次で定める。これを乗法という。

$$(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

なお，$(a_1 \quad a_2 \quad a_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$のように行ベクトルと列ベクトルの次数が異なる場合には，計算できない。

注意. 列ベクトルと列ベクトル，または行ベクトルと行ベクトルの積とせずに，行ベクトルと列ベクトルの計算であることが，いささか不思議な気がする。実はこのようにしておくことで，1.3.2 で学ぶように表が縦横に広がったときにも対応できるのである。

問 1.15. 次の計算をせよ。

(1) $(4 \quad -7)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$　　(2) $(1 \quad -1 \quad 1 \quad -1)\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$

例 1.6. n 次行ベクトル$(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$にすべての成分が 1 である n 次列ベクトル$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$を右からかけてみよう。そうすると，

$$(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

となり，行ベクトルのすべての成分の和になる。また，n 次列ベクトル$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$に左からすべての成分が 1 である n 次行ベクトル$(1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1)$をかけても，

$$(1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

となり，列ベクトルのすべての成分の和になる。

問 1.16. $(1 \quad 2 \quad \cdots \quad n)$を n 次行ベクトル，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$を n 次列ベクトルとするとき，

$(1 \quad 2 \quad \cdots \quad n)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$を求めよ。

1.3.2　行列と行列の積

続いて，先ほどの単価と購入個数の表をさらに発展させよう。3 種類の商品 A，B，C を販売している商店が山商店と川商店の 2 店あって，商品 A，B，C を松さん，竹さん，梅さんの 3 名が購入する場合を考える。それぞれの価格と，購入個数をまとめたのが次の表である。

商品	A	B	C
山商店での価格	a	b	c
川商店での価格	a'	b'	c'

商品	松さんの購入個数	竹さんの購入個数	梅さんの購入個数
A	x	x'	x''
B	y	y'	y''
C	z	z'	z''

それぞれの人は商品 A，B，C をすべて同じ商店で購入するとする。このとき，初めの表をもとにそれぞれの代金を網羅した表を作ると，次のような全部で 6 つのセルを持つ表になる。

				松さん	竹さん	梅さん
				x	x'	x''
				y	y'	y''
				z	z'	z''
山商店	a	b	c	$ax+by+cz$	$ax'+by'+cz'$	$ax''+by''+cz''$
川商店	a'	b'	c'	$a'x+b'y+c'z$	$a'x'+b'y'+c'z'$	$a'x''+b'y''+c'z''$

この計算が行列の積に対応していて，

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+cz & ax'+by'+cz' & ax''+by''+cz'' \\ a'x+b'y+c'z & a'x'+b'y'+c'z' & a'x''+b'y''+c'z'' \end{pmatrix}$$

と表される。これは，

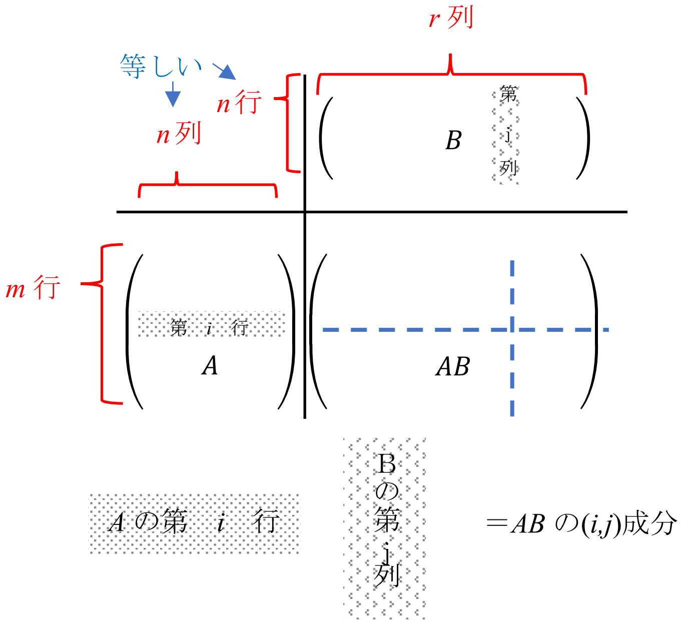
(各商店の単価の表)・(各人の購入個数の表)＝(各人の各商店ごとの購入金額の和)

という表記の仕組みとなっている。

　行列 A と B の積を A の列の個数が B の行の個数に等しい場合に，次のように定める。

> A を m 行 n 列の行列，B を n 行 r 列の行列とする。
> A の第 i 行と B の第 j 列はともに n 次数ベクトルであるから，積が定まる。
> この積を $(i,\ j)$ 成分とする m 行 r 列の行列を $A,\ B$ の**積**といい AB で表す。

行列 A と B の積



n 次行ベクトルに n 次列ベクトルを右からかける

例 1.7. (1) $\begin{pmatrix}1 & 9\\ -6 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot4+9\cdot5\\(-6)\cdot4+2\cdot5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}49\\-14\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & z\\ y & w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax+by & az+bw\\ cx+dy & cz+dw\end{pmatrix}$

(4) $(a \quad b)\begin{pmatrix}p & q & r\\ s & t & u\end{pmatrix} = (ap+bs \quad aq+bt \quad ar+bu)$

(5) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(a \quad b \quad c \quad d) = \begin{pmatrix}a & b & c & d\\ a & b & c & d\\ a & b & c & d\end{pmatrix}$　　(行が 1 の数だけ繰り返される。)

(6) $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1) = \begin{pmatrix}a & a & a & a & a\\ b & b & b & b & b\\ c & c & c & c & c\end{pmatrix}$　　(列が 1 の数だけ繰り返される。)

注意. $a,\ b$ が数であれば ab も ba も計算できたが，行列の場合には，行列 A の列の個数が行列 B の行の個数に等しい場合に限り，積 AB が定義できた。したがって，AB が定義できても，BA が定義できるとは限らない。例えば，

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix}3 & 5 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\ \text{のとき}\ AB = \begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 13 & 20 & -1\end{pmatrix}$$

と計算できるが，B の列の個数が 3 で A の行の個数が 2 でこれらが異なるため，BA は計算できない。

問 1.17. 次の計算をせよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$

問 1.18. 次の行列の中から，積が計算できる 2 つの行列を選んで，その積を計算せよ。ただし，同じものを 2 回選んでもよいこととする。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.3.3　対角行列，単位行列

次の表は，花子さんの家で，1 月から 3 月までにスーパーで買い物をした，飲食料品費とそれ以外の費用のそれぞれの税込の合計金額である。花子さんは，この表（単位は円）からそれぞれ消費税をいくら払っているのか計算しようとしている。

	飲食料品費	飲食料品費以外
1 月	75600	12100
2 月	68040	14300
3 月	69120	15400

消費税率は，飲食料品には 8 %，それ以外には 10 %かかっているとして，この表から，それぞれの税額を計算するには，どのようにすればよいだろうか。もちろん，

（税抜き金額）×（1＋税率）＝（税込み金額）
（税抜き金額）×（税率）＝（税額）

という関係があるから，第 1 列全体に，$\frac{0.08}{1.08}$をかけ，第 2 列全体に，$\frac{0.1}{1.1}$をかければよい。そして，この計算は，行列を用いて表現することができる。次のように行えばよい。

$$\begin{pmatrix} 75600 & 12100 \\ 68040 & 14300 \\ 69120 & 15400 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{0.08}{1.08} & 0 \\ 0 & \frac{0.1}{1.1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5600 & 1100 \\ 5040 & 1300 \\ 5120 & 1400 \end{pmatrix}$$

このような列ごとに定数倍する計算は，左上から右下に向かう対角線上に定数倍する数を置き，それ以外が 0 である正方行列を右からかけることで実現できる。一般に，n 次正方行列において，左上から右下に至る対角線を**主対角線**といい，主対角線上の n 個の成分を**対角成分**という。例えば，次の行列では，色を塗った成分が対角成分になる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 7 \\ 2 & -3 & 5 & 0 \\ -3 & 8 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

そして，対角成分以外がすべて 0 である正方行列を**対角行列**という。例えば，

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

は対角行列である[3]。他の例でもみてみよう。

例えば，$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$という行列に右から$D=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$をかけると，

$$AD=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&2b&3c\\4a&5b&6c\end{pmatrix}$$

となり，A の各列が D の対角成分にしたがって a 倍，b 倍，c 倍されている。また，左から$D'=\begin{pmatrix}k&0\\0&\ell\end{pmatrix}$をかけると，

$$D'A=\begin{pmatrix}k&0\\0&\ell\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&2k&3k\\4\ell&5\ell&6\ell\end{pmatrix}$$

となり，A の各行がD'の対角成分にしたがって k 倍，ℓ 倍されている。

一般に，行列に対角行列を右からかけると，対角成分にしたがって列ごとに定数倍され，行列に対角行列を左からかけると，対角成分にしたがって行ごとに定数倍される。

問 1.19. 次の行列の中から，対角行列を選べ。

(1) $\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\3&0&0\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\3&0&3\end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

問 1.20. 次の行列について，対角成分をいえ。

(1) $\begin{pmatrix}5&3\\1&7\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}0&1&2\\3&4&5\\6&7&8\end{pmatrix}$

問 1.21. 次の計算を行え。

(1) $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&5&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&2\\-4&2&0\\-5&9&-1\end{pmatrix}$

問 1.22. 太郎さんは，アメリカの通販サイトを見て商品の比較をしている。そこでは，全長はインチで，重さはポンドで，価格は米ドルで表示されている。A，B，C３つの商品について，全長，重さ，価格をまとめると次の表のようになる。これを，センチメートル，グラム，日本円に換算するための行列を用いた計算式を作り，それを計算せよ。ただし，１インチを 2.54 センチメートル，１ポンドを 454 グラム，　１ドルを 108 円とせよ。

	全長（インチ）	重さ（ポンド）	価格（ドル）
商品 A	5.7	1.0	37
商品 B	3.6	1.1	22
商品 C	9.3	1.8	57

注意. 上の問のように, 対角行列は列や行ごとの単位換算に用いられることがある。しかし, それ以外の用途もあることを，２章以降で学ぶ。

[3] 対角成分は 0 でも構わない。

先に用いた行列 D で，$a = b = c = 1$である場合や，D'で$k = \ell = 1$である場合は，$AD = A$や$D'A = A$ が成り立つ。このような行列，すなわち対角成分がすべて 1 である対角行列を**単位行列**といい E で表す。n 次正方行列である単位行列を n **次単位行列**といい，行列の型を明示する必要があるときには，E_nと表す。

例えば，2 次単位行列は $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 3 次単位行列は $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。「単位」には，「単位あたりの量」という使い方があるように，1 という意味がある。すなわち，単位行列は数の世界での 1 に対応するものということである。数の世界での「1」といえば，「最も小さな自然数」や「最も基本的な数」だと考える人もいるかもしれない。しかしそれ以外に，どのような数 x に対しても，

$$1 \cdot x = x,\ \ x \cdot 1 = x$$

を満たす，すなわち乗法により相手の数値を変えないという性質を持っている。同様に単位行列の「単位」とは，どんな行列に E をかけても元の行列を変えないという意味である。単位行列について，次の性質が成り立つ。

> A を m 行 n 列の行列とするとき，
>
> $$E_m A = A,\ \ AE_n = A$$

問 1.23. 4 次単位行列を書け。

1.4　転置行列

1.4.1　転置行列

ここで再び，1 ページで話題にした，X さん，Y さん，Z さんの成績の表について考えてみよう。１学期，２学期に引き続いて，３学期の成績も表にしようと思ったが，以前に作成した表を見ずに作ったので，次のようになった。

３学期	X さん	Y さん	Z さん
国語	70	80	75
数学	84	78	86
英語	75	85	80
理科	66	70	83

もちろん，この表の書き方に誤りはないが，1 ページの２つの表とは違いがある。それは，縦と横が入れ替わっているという点である。これをもとに数値だけを取り出した行列を D とすると，

$$D = \begin{pmatrix} 70 & 80 & 75 \\ 84 & 78 & 86 \\ 75 & 85 & 80 \\ 66 & 70 & 83 \end{pmatrix}$$

である。ところが，初めの表で縦と横が入れ替わってしまったために，２学期からの成績変化を調べようとしても，４ページで導入した２学期の成績の行列

$$B = \begin{pmatrix} 71 & 86 & 70 & 64 \\ 83 & 71 & 82 & 75 \\ 76 & 88 & 74 & 85 \end{pmatrix}$$

を用いて$D-B$という計算ができない。

解決策を考えよう。２学期までの表と３学期の表では，縦と横が入れ替わっている。それを行列の言葉で表現すると，列と行が入れ替わっているということである。D の各列には，各人の科目の点数データが並んでいるので, これらを行ベクトルとする行列を作れば B と揃う。すなわち，行列 D の行と列を入れ替えた行列を作れば解決する。

３学期	X さん	Y さん	Z さん
国語	70	80	75
数学	84	78	86
英語	75	85	80
理科	66	70	83

→

３学期	国語	数学	英語	理科
X さん	70	84	75	66
Y さん	80	78	85	70
Z さん	75	86	80	83

$$\begin{pmatrix} 70 & 80 & 75 \\ 84 & 78 & 86 \\ 75 & 85 & 80 \\ 66 & 70 & 83 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行と列を入れ替える}} \begin{pmatrix} 70 & 84 & 75 & 66 \\ 80 & 78 & 85 & 70 \\ 75 & 86 & 80 & 83 \end{pmatrix}$$

行列 A の行と列を入れ替えた行列を，行列 A の**転置行列**といい，${}^tA$で表す。A から ${}^tA$を作ることを，A を**転置する**という。すなわち，A の第 1 行，第 2 行・・・の成分の並びが ${}^tA$ の第 1 列，第 2 列，・・・の成分の並びと一致し，A の第 1 列，第 2 列・・・の成分の並びが ${}^tA$の第 1 行，第 2 行，・・・の成分の並びと一致するのである。

転置行列

$$A=\begin{pmatrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \vdots \\ \rightarrow \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad {}^tA=\begin{pmatrix} \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{pmatrix}$$

例 1.8. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ を転置すると，${}^tA=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ である。

例 1.9. 転置行列の考え方を用いて，２学期から３学期への成績の変化を計算する式を立てて計算すると，転置操作は減法よりも優先されて，

$${}^tD-B=\begin{pmatrix} 70 & 84 & 75 & 66 \\ 80 & 78 & 85 & 70 \\ 75 & 86 & 80 & 83 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 71 & 86 & 70 & 64 \\ 83 & 71 & 82 & 75 \\ 76 & 88 & 74 & 85 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 & 2 \\ -3 & 7 & 3 & -5 \\ -1 & -2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

となる。

例 1.8 では，A は 2 行 3 列の行列であり，${}^tA$は 3 行 2 列の行列である。上の成績の行列では，D は 4 行 3 列の行列であり，${}^tD$は 3 行 4 列の行列である。同様に考えて A が m 行 n 列の行列ならば，${}^tA$は n 行 m 列の行列である。

${}^t({}^tA)$を計算するとどうなるだろうか。行と列を入れ替えて（転置して），さらにもう一度行と列を入れ替える（転置する）のだから，初めの行列に戻るはずである。つまり，次が成り立つ。

行列 A について，${}^t({}^tA)=A$

1.4.2　行列の和・定数倍と転置操作

例えば,

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

のとき,

$${}^t(A+B) = {}^t\begin{pmatrix} a+u & b+v & c+w \\ d+x & e+y & f+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+u & d+x \\ b+v & e+y \\ c+w & f+z \end{pmatrix}$$

であり,

$${}^tA + {}^tB = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & x \\ v & y \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+u & d+x \\ b+v & e+y \\ c+w & f+z \end{pmatrix}$$

となり，２つの計算結果は等しい。このように転置操作と和や定数倍では次の関係が成り立つ。

> A,　B を同じ型の行列，k を実数とするとき，次が成り立つ。
> (1)　${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$　　　　(2)　${}^t(kA) = k\,{}^tA$

問 1.24.　上の囲みの(2)を$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$の場合に示せ。

問 1.25. A を行列とする。$A + {}^tA$が計算できるための必要十分条件は A が正方行列であることを示せ。

1.4.3　対称行列

ここでは特に正方行列を転置することを考えてみよう。$A = {}^tA$をみたす正方行列 A を**対称行列**という。

例 1.10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$は ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$であるため, $A = {}^tA$が成り立ち, 対称行列である。一方, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$は ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$であるため，$B \neq {}^tB$であり，対称行列ではない。

さて, 2 次正方行列$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$が対称行列であるための条件を求めてみよう。$A = {}^tA$より,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

となる。そうすると，各成分を比較することで A が対称行列であるための必要十分条件は, $b = c$，すなわち，(1，2)成分と(2，1)成分が等しいことであるとわかる。よって，2 次対称行列は$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$と表され，主対角線に関して行列が対称になっていることがわかる。同様に，3 次対称行列は,

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

と表され，やはり主対角線に関して行列が対称になっている。

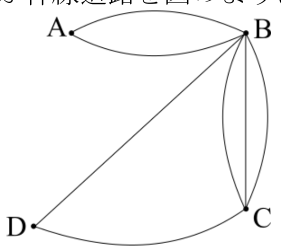
対称行列（3 次）

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

主対角線（対称軸）

一般に$i \neq j$のとき，対称行列は，$(i,\ j)$成分と$(j,\ i)$成分が等しく，主対角線に関して対称になっている。

例 1.11.　4 地点 A，B，C，D を結ぶ幹線道路を図のように整備したい。



A，B，C，D の 4 地点を結ぶ幹線道路のようす

それぞれの地点の間を結ぶ道路の本数を表にまとめると次のようになる。

	A	B	C	D
A	0	2	0	0
B	2	0	3	1
C	0	3	0	1
D	0	1	1	0

この表から数値部分のみを取り出して行列だと考えると，

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となり，これは対称行列である。

問 1.26.　上の幹線道路の行列が対称行列である理由を述べよ。

<u>**話し合ってみよう**</u>. 行列として表したときに対称行列になる表にはどのようなものがあるか。話し合ってみよう。

1.4.4　数ベクトルを並べて，行列を作るという見方と転置

今一度，14 ページで登場した次の表とそれをもとに作った行列 D を考えよう。

3 学期	X さん	Y さん	Z さん
国語	70	80	75
数学	84	78	86
英語	75	85	80
理科	66	70	83

$$\rightarrow \qquad D = \begin{pmatrix} 70 & 80 & 75 \\ 84 & 78 & 86 \\ 75 & 85 & 80 \\ 66 & 70 & 83 \end{pmatrix}$$

この表は X，Y，Z の 3 名の成績を縦に並べた表である。したがって，それに対応して行列 D の方も 3 名の成績が第 1 列，第 2 列，第 3 列に並んでいる。ここで，それらを順に

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}70\\84\\75\\66\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}80\\78\\85\\70\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}75\\86\\80\\83\end{pmatrix}$$

とおく。3 つの 4 次列ベクトル $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$ は D から取り出したものであるが，逆にこれらを並べることで D ができていると考えることもできる。そこで，これを，

$$D=(\boldsymbol{x}\quad \boldsymbol{y}\quad \boldsymbol{z})$$

のように表す。この章の最初に「数や文字を長方形に並べたもの」として行列を紹介したが，数ベクトルを 1 つの方向に並べても行列ができるのである。

列ベクトルを並べて行列ができるという考え方は便利である。例えば，この 3 名に加えて，V さん，W さんの成績のベクトル $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ があったとしたら，それらを並べて，

$$(\boldsymbol{x}\quad \boldsymbol{y}\quad \boldsymbol{z}\quad \boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{w})$$

という 4 行 5 列の行列を作ることもできる。一般に表すと次のようになる。

> $\boldsymbol{a_1}$，$\boldsymbol{a_2}$，$\cdots$，$\boldsymbol{a_n}$ を同じ型の列ベクトルとするとき，これらを順に並べてできる行列を $(\boldsymbol{a_1}\quad \boldsymbol{a_2}\quad \cdots\quad \boldsymbol{a_n})$ と表す。

問 1.27. $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$ のとき，次のものを求めよ。

(1) $(\boldsymbol{a}\quad \boldsymbol{b}\quad \boldsymbol{c})$　(2) $(\boldsymbol{b}\quad \boldsymbol{c}\quad \boldsymbol{a})$　(3) $(\boldsymbol{c}\quad \boldsymbol{a}\quad \boldsymbol{c}\quad \boldsymbol{b}\quad \boldsymbol{a})$

続いて，$D=(\boldsymbol{x}\quad \boldsymbol{y}\quad \boldsymbol{z})$ をもとに ${}^tD$ がどのように表されるか考えてみよう。これには，行ベクトルが並んで行列ができるという考え方で対応する。つまり，

$$(\boldsymbol{x}\quad \boldsymbol{y}\quad \boldsymbol{z})=\begin{pmatrix}70&80&75\\84&78&86\\75&85&80\\66&70&83\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{転置}}\begin{pmatrix}70&84&75&66\\80&78&85&70\\75&86&80&83\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}{}^t\boldsymbol{x}\\{}^t\boldsymbol{y}\\{}^t\boldsymbol{z}\end{pmatrix}$$

となり，

$${}^tD=\begin{pmatrix}{}^t\boldsymbol{x}\\{}^t\boldsymbol{y}\\{}^t\boldsymbol{z}\end{pmatrix}$$

となることがわかる。一般に次が成り立つ。

$\boldsymbol{a_1}$，$\boldsymbol{a_2}$，…，$\boldsymbol{a_n}$ を同じ型の列ベクトルとするとき，これらを順に並べてできる行列を

$A = (\boldsymbol{a_1} \quad \boldsymbol{a_2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a_n})$とおくとき，${}^tA = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{a_1} \\ {}^t\boldsymbol{a_2} \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{a_n} \end{pmatrix}$である。

問 1.28. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$のとき，$\begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{c} \\ {}^t\boldsymbol{a} \\ {}^t\boldsymbol{b} \end{pmatrix}$を求めよ。

1.5　表の操作と行列の積

ここでは，行列の積を表の操作に利用することを考えてみよう。積というと，そのイメージは何倍かするといった操作と結びついているかもしれない。ところが行列の積を用いると，表から列や行を抽出することや，列や行を入れ替えることといった，およそ積のイメージとはかけ離れたものまで，実行できるのである。しかもそういった操作が簡潔な式で表すことができるのである。式に表せるからこそ, 表の操作が式で可能になるという点は重要である。

この章の最初で用いた，成績の行列をもとに考えてみる。

$$A = \begin{pmatrix} 65 & 82 & 78 & 70 \\ 85 & 63 & 90 & 65 \\ 76 & 90 & 82 & 85 \end{pmatrix}$$

すなわち，元の表として，

1 学期	国語	数学	英語	理科
X さん	65	82	78	70
Y さん	85	63	90	65
Z さん	76	90	82	85

を考える。

1.5.1　列の抽出

元の表から，３人の１教科の成績だけを取り出すことを考えよう。行列の言葉で表現すると，１つの列を取り出すことになる。

１つの成分だけが 1 で他のすべての成分が 0 である列ベクトルを基本ベクトルといい，1 である場所が上から i 番目であるとき，$\boldsymbol{e_i}$と表す。

注意. e_iの記号は，列ベクトルの型によらず用いることにする。そのため，用いるときには常に型に注意して用いる必要がある。例えば，3 次列ベクトル$\boldsymbol{e_2}$は$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$を表し，4 次列ベクトル$\boldsymbol{e_3}$は$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$を表す。

問 1.29. 5 次列ベクトル$\boldsymbol{e_2}$を書け。

そうすると，行列 A から第 3 列だけを取り出したいなら，4 次列ベクトル$\boldsymbol{e_3}$を右からかければよい。

$$A\boldsymbol{e_3} = \begin{pmatrix} 65 & 82 & 78 & 70 \\ 85 & 63 & 90 & 65 \\ 76 & 90 & 82 & 85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 \\ 90 \\ 82 \end{pmatrix}$$

となる。

問 1.30. 行列$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$から第 2 列を抽出するには，$B$ の右からどのような行列をかければよいか。

1.5.2　複数列の抽出

元の表から，３人のいくつかの教科の成績を取り出すことを考えよう。行列の言葉で表現すると，いくつかの列を取り出すことになる。

例えば，行列 A から第 2 列と第 4 列を取り出すとしよう。それには，２つの 4 次列ベクトル$\boldsymbol{e_2}$，$\boldsymbol{e_4}$を並べて，行列

$$(\boldsymbol{e_2} \quad \boldsymbol{e_4}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を作り，これを A に右からかければよい。

$$A(\boldsymbol{e_2} \quad \boldsymbol{e_4}) = \begin{pmatrix} 65 & 82 & 78 & 70 \\ 85 & 63 & 90 & 65 \\ 76 & 90 & 82 & 85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 & 70 \\ 63 & 65 \\ 90 & 85 \end{pmatrix}$$

なお最後の計算結果は，A から 2 列目と 4 列目を取り出したものなので，$A\boldsymbol{e_2}$と$A\boldsymbol{e_4}$が順に並んでいる。したがって，$A(\boldsymbol{e_2} \quad \boldsymbol{e_4}) = (A\boldsymbol{e_2} \quad A\boldsymbol{e_4})$という式も得られる。

問 1.31. 行列$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$から第 1 列と第 3 列を取り出すには，$B$ の右からどのような行列をかければよいか。

1.5.3　列の並べ替え

複数列の抽出の考え方を利用して, 元の表の列を並べ替えることを考えてみよう。例えば, 元の表の成績の順を「英語，数学，理科，国語」の順に並べ替えたいとする。「並べ替え」と表現しているが，これは元の表から，第 3 列，第 2 列，第 4 列，第 1 列の順番で 4 列を取り出すことと同じである。それには，4 つの 4 次列ベクトル$\boldsymbol{e_3}$，$\boldsymbol{e_2}$，$\boldsymbol{e_4}$，$\boldsymbol{e_1}$をこの順に並べて，行列

$$(\boldsymbol{e_3} \quad \boldsymbol{e_2} \quad \boldsymbol{e_4} \quad \boldsymbol{e_1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を作り，これを A に右からかければよい。

$$A(\boldsymbol{e_3} \quad \boldsymbol{e_2} \quad \boldsymbol{e_4} \quad \boldsymbol{e_1}) = \begin{pmatrix} 65 & 82 & 78 & 70 \\ 85 & 63 & 90 & 65 \\ 76 & 90 & 82 & 85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 & 82 & 70 & 65 \\ 90 & 63 & 65 & 85 \\ 82 & 90 & 85 & 76 \end{pmatrix}$$

また，最後の行列は$(A\boldsymbol{e_3}\quad A\boldsymbol{e_2}\quad A\boldsymbol{e_4}\quad A\boldsymbol{e_1})$と表すこともできる。

問 1.32. 行列$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$の列を 1 つずつ左にずらし，第 1 列を一番右に配置するには，B の右からどのような行列をかければよいか。

<u>**話し合ってみよう**</u>. 列の並べ替えの際に右からかけた行列は，正方行列になっている。これは偶然なのか，意味があることなのか，話し合ってみよう。

1.5.4　行に関する操作

ここまで，列に対して行ってきた操作を，今度は行に関して行うことを考えてみよう。表の操作としては，１人の成績の抽出，複数人の成績の抽出，人の並べ替えを考えよう。行列の言葉で表現すると，１つの行の抽出，複数行の抽出，行の並べかえにそれぞれ対応する。これらの計算は，転置した基本ベクトルを行列に左からかけることで実現できる。

例えば，Y さんの成績を抽出することは，

$$A=\begin{pmatrix}65&82&78&70\\85&63&90&65\\76&90&82&85\end{pmatrix}$$

から第 2 行を抽出する計算に相当する。その計算は，3 次行ベクトル

$${}^t\boldsymbol{e_2}=(0\quad 1\quad 0)$$

を A の左からかけて，

$${}^t\boldsymbol{e_2}A=(0\quad 1\quad 0)\begin{pmatrix}65&82&78&70\\85&63&90&65\\76&90&82&85\end{pmatrix}=(85\quad 63\quad 90\quad 65)$$

で行える。

今度は，人の並び替えを考えてみよう。例えば，この表から Y さん，Z さん，X さんの順に並んだ表を作る計算を考える。これは，A の 1 行目を一番下に移動して，2 行目と 3 行目を 1 行ずつ上にずらす操作に相当する。それには，3 次行ベクトルを 3 段積んでできる行列

$$\begin{pmatrix}{}^t\boldsymbol{e_2}\\{}^t\boldsymbol{e_3}\\{}^t\boldsymbol{e_1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

を A に左からかけて，

$$\begin{pmatrix}{}^t\boldsymbol{e_2}\\{}^t\boldsymbol{e_3}\\{}^t\boldsymbol{e_1}\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}65&82&78&70\\85&63&90&65\\76&90&82&85\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}85&63&90&65\\76&90&82&85\\65&83&78&70\end{pmatrix}$$

と計算すればよい。なお，最後の行列は A から第 2 行，第 3 行，第 1 行をこの順に取り出して並べたものであるので，$\begin{pmatrix}{}^t\boldsymbol{e_2}A\\{}^t\boldsymbol{e_3}A\\{}^t\boldsymbol{e_1}A\end{pmatrix}$とも表される。

問 1.33. 行列 A に左から$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$をかけることにより，$A$ にはどのような操作が行われるか説明せよ。

問 1.34. 元の表から X さんと Z さんの成績をこの順で抽出したい。そのためには，行列 A に左からどのような行列をかければよいか。

1.5.5　各行の成分の和

３人の人の成績の合計を計算することを考えよう。行列の言葉で表現すると，各行の成分を加えることである。また，行列 A の４つの列ベクトルの和を求めることでもある。これには９ページの例 1.6 の考え方が役に立つ。そこでは，すべての成分が 1 である数ベクトルを用いた。今後，この数ベクトルをしばしば用いるので，記号を導入することにする。数字の 1 を太く $\mathbf{1}_{\boldsymbol{n}}$ と書いて，すべての成分が 1 である n 次列ベクトルを表すものとする。

A に $\mathbf{1}_{\mathbf{4}}$ を右からかけることで実現できる。

$$A\mathbf{1}_{\mathbf{4}} = \begin{pmatrix} 65 & 82 & 78 & 70 \\ 85 & 63 & 90 & 65 \\ 76 & 90 & 82 & 85 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65\cdot 1 + 82\cdot 1 + 78\cdot 1 + 70\cdot 1 \\ 85\cdot 1 + 63\cdot 1 + 90\cdot 1 + 65\cdot 1 \\ 76\cdot 1 + 90\cdot 1 + 82\cdot 1 + 85\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 295 \\ 303 \\ 333 \end{pmatrix}$$

問 1.35. 元の表から，国語（第 1 列）と理科（第 4 列）の成績の和に，数学（第 2 列）と英語（第 3 列）の成績の和の 1.5 倍を合計した評点を求めたい。行列 A の右からどのような行列をかければよいか。

注意. ここまで用いてきた特別な数ベクトルについて，その表し方には記号によって違いがあるので注意しよう。$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}}$ は第 i 成分のみが 1 で他が 0 の列ベクトルである。$\mathbf{0}$ はすべての成分が 0 の列ベクトルである。$\mathbf{1}_{\boldsymbol{n}}$ はすべての成分が 1 の n 次列ベクトルである。$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}}$ の i は成分が 1 の場所だが，$\mathbf{1}_{\boldsymbol{n}}$ の n は列ベクトルの型である。統一性がないので混乱する恐れがあるが，重要な情報を優先して表示するための配慮であると考えよう。

1.5.6　各列の成分の和

教科ごとの成績の合計を計算することを考えよう。行列の言葉で表現すると，各列の成分を加えることである。また，行列 A の３つの行ベクトルの和を求めることでもある。これは A に ${}^{t}\mathbf{1}_{\mathbf{3}}$ を左からかけることで実現できる。

$${}^{t}\mathbf{1}_{\mathbf{3}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 65 & 82 & 78 & 70 \\ 85 & 63 & 90 & 65 \\ 76 & 90 & 82 & 85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 226 & 235 & 250 & 220 \end{pmatrix}$$

問 1.36. A に左から次の行ベクトルをかけるとき，その結果が元の表でどういう意味を持つか説明せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　　　　(2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.6　加減乗と定数倍の混ざった計算

1.6.1　計算の順序

これまで，行列の加法，減法，定数倍，乗法，転置操作を学んできたが，これらを混合した計算を考えよう。その場合，行列の計算は次の順序で行う。これは概ね，数の計算の場合と同様である。

(1) 括弧がある場合は括弧の中を先に実行する。

(2) 転置操作がある場合は，転置操作から行う。

(3) 定数倍や積がある場合には，それらを計算する。

(4) 和と差に関して左から順次計算を行う。

例 1.12.

$$5\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 4 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 10\\ -15 & 20\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 9 & -4\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3 & 10\\ -6 & 16\end{pmatrix}$$

問 1.37. 次の計算をせよ。

(1) $\left(2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

(2) $4\begin{pmatrix}1 & 1\\ 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & -1\\ -5 & 1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

(4) ${}^{t}\mathbf{1}_2\mathbf{1}_2+{}^{t}\mathbf{1}_3\mathbf{1}_3-{}^{t}\mathbf{1}_4\mathbf{1}_4$

1.6.2　行列の積の性質

A，B，C を行列，E を単位行列，O を零行列とし，k を実数とする。両辺の演算が定義される場合，数の場合と同様に，次の計算法則が成り立つ。すでに登場したものも含めてまとめておく。

(1) $AE=A$，$EA=A$　(2) $AO=O$，$OA=O$
(3) $(kA)B=k(AB)=A(kB)$
(4) $A(B+C)=AB+AC$，$(A+B)C=AC+BC$　（分配法則）
(5) $(AB)C=A(BC)$　（積の結合法則）

注意．(1)，(2)について A が正方行列でなければ，左からと右からとでは，かける行列の型が異なっている。例えば，A が 2 行 3 列の行列$A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}$であれば，上の(1)の性質は，

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}$$

となる。14 ページでは単位行列を左からかけるか，右からかけるかで記号を使い分けたが，上記のように表すことも多い。

ここでは，2 次正方行列の場合に(4)の第 1 式の成立を確認してみよう。

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}k & \ell\\ m & n\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}s & t\\ u & v\end{pmatrix}$とおくと

$$\begin{aligned}A(B+C)&=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k+s & \ell+t\\ m+u & n+v\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}a(k+s)+b(m+u) & a(\ell+t)+b(n+v)\\ c(k+s)+d(m+u) & c(\ell+t)+d(n+v)\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}(ak+as)+(bm+bu) & (a\ell+at)+(bn+bv)\\ (ck+cs)+(dm+du) & (c\ell+ct)+(dn+dv)\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}ak+bm & a\ell+bn\\ ck+dm & c\ell+dn\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}as+bu & at+bv\\ cs+du & ct+dv\end{pmatrix}=AB+AC\end{aligned}$$

<u>話し合ってみよう</u>．(4)以外の上の性質を 2 次正方行列の場合に確かめ，互いに説明し合おう。また，(1)の性質について，列や行の並べ替えの考え方を用いて説明できないか話し合ってみよう。

先に述べた積の結合法則により，$A(BC)$と$(AB)C$は単にABCと書いてもよいことがわかる。そして，結合法則を繰り返し用いることで，４個以上の行列の積についても，（　）をつけずに，$ABCD$ のように表せばよいし，計算のしやすさに応じて，$(AB)(CD)$や$A(BC)D$などとして計算すればよいことがわかる。また，A が正方行列のときには，A だけを m 個かけたものを考えることができる。これをA^mと書き，A の m 乗という。
<u>話し合ってみよう</u>．m を２以上の整数とする。行列 A が正方行列でない場合，A^mを考えることができるだろうか。話し合ってみよう。

例題 1.2.　次の計算をせよ。

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}10 & 9\\ -5 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}13 & 15\\ 8 & -\frac{15}{2}\end{pmatrix}\right)$

(2) $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & -14 & -2\\ 6 & 12 & 10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 6\\ 8 & -10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -7 & -1\\ 3 & 5 & 5\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}-13 & 9\\ -7 & -11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}^4$

解答.　(1) 順序通りに計算してもよいが，次のように分配法則を用いてもよい。

$$\begin{aligned}与式 &= \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10 & 9\\ -5 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13 & 15\\ 8 & -\frac{15}{2}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 23\\ 0 & 46\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}29 & 0\\ 58 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}29 & 23\\ 58 & 46\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(2) 順序通りに計算してもよいが，次のように分配法則を用いてもよい。

$$\begin{aligned}与式 &= \begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & -14 & -2\\ 6 & 12 & 10\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -7 & -1\\ 3 & 5 & 5\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & -5\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}8 & -14 & -2\\ 6 & 12 & 10\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}3 & -7 & -1\\ 3 & 5 & 5\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2 & 6 & 0\\ 8 & -10 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(3) 左から計算してもよいが，次のように計算すると計算の回数が減る。

$$\begin{aligned}与式 &= \begin{pmatrix}-13 & 9\\ -7 & -11\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}-13 & 9\\ -7 & -11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3\\ 4 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}36 & -39\\ -44 & -21\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}与式 &= \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}^2\\ &= \begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}^2\\ &= \begin{pmatrix}16 & 0\\ 0 & 81\end{pmatrix}\end{aligned}$$

問 1.38. 次の計算をせよ。ただし，(4)，(5)の a，b，c は定数である。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 & 18 & -24 \\ 51 & -30 & -27 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 8 \\ -17 & 12 & 10 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -9 & -8 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ 3 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}\right)$

(3) $\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^4$

(5) $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^4$

例題 1.2 の(4)や問 1.38 の(4)を通して，すでに気づいているかもしれないが，対角行列 A については，A^m （ただし，m は自然数）は各対角成分の m 乗になる。すなわち，a_1，a_2，…，a_nを対角成分とする n 次対角行列 A について，次が成り立つ。

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \quad \text{のとき，} \quad A^m=\begin{pmatrix} a_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}$$

問 1.39. 数学的帰納法を用いて，対角行列の m 乗は各対角成分を m 乗した対角行列になることを 2 次正方行列の場合に証明せよ。

問 1.40. 次の計算をせよ。ただし，a，b，c は定数とする。

(1) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

1.7　行列の積の様々な性質

これまで，数の場合と同様に成り立つ性質を学んできたが，行列の積には，行列の場合特有の様々な性質がある。そういった性質を初めはややこしく感じるかもしれないが，数の計算にはない性質を持っていることが，行列が広く利用される要因にもなっている。

1.7.1　積が計算できる前提

11 ページでも注意をしたように，行列の場合には，行列 A の列の個数が行列 B の行の個数に等しい場合に限り，積 AB を考えることができた。したがって，AB が計算できても，BA

が計算できるとは限らない。

　もちろん，AB と BA がどちらも計算できる場合もある。例えば，A と B がともに 2 次正方行列の場合には，AB と BA はどちらも計算できる。一般に，A と B が同じ次数の正方行列の場合には，AB と BA はどちらも計算できる。

1.7.2　行列の積と転置の操作

　A，B を同じ型の行列，k を実数とするとき，16 ページで学んだように，行列の和や定数倍と転置操作との間には，

$$(1)\quad {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB \qquad\qquad (2)\quad {}^t(kA) = k\,{}^tA$$

という関係が成り立った。それでは，行列の積と転置操作との間の関係はどうなっているだろうか。そのために，例えば，

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

という２つの行列を考えてみる。このとき，積 AB は計算できて，

$$AB = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \\ ex+fz & ey+fw \end{pmatrix}$$

となる。ここで A，B を転置して，${}^tA$，${}^tB$を考えると，

$${}^tA = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix},\quad {}^tB = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$$

となる。このとき，${}^tA$の列の数は３であり，${}^tB$の行の数が２であるので，${}^tA\,{}^tB$を計算することができない。ところが，かける順序を入れ替えると，${}^tB\,{}^tA$は計算できて，

$${}^tB\,{}^tA = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & cx+dz & ex+fz \\ ay+bw & cy+dw & ey+fw \end{pmatrix}$$

となる。この計算結果は AB を転置したものに等しくなっている。一般に次が成り立つ。

> ２つの行列 A，B に対して，積 AB が計算できるとき，
> $${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$

問 1.41．$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ について，${}^t(A\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}\,{}^tA$が成立することを確かめよ。

1.7.3　転置行列との積は常に計算可能！

　ここでは行列 A と ${}^tA$の積を考える。例えば次の2×3型行列を考えよう。

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

このとき，${}^tA$は3×2型になって，

$${}^tA = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

である。すると，転置していることから A の列数と ${}^tA$の行数はともに３で等しく，${}^tA$の列数と A の行数はともに２で等しい。その結果，$A\,{}^tA$と ${}^tAA$はどちらも計算することができ，

$$A\ {}^tA=\begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & ad+be+cf \\ da+eb+fc & d^2+e^2+f^2 \end{pmatrix}$$
$${}^tAA=\begin{pmatrix} a^2+d^2 & ab+de & ac+df \\ ba+ed & b^2+e^2 & bc+ef \\ ca+fd & cb+fe & c^2+f^2 \end{pmatrix}$$

となる。これらを調べると$A\ {}^tA$と ${}^tAA$はいずれも対称行列になっていることがわかる。一般に次が成り立つ。

> A を$m\times n$型行列とする。このとき，$A\ {}^tA$と ${}^tAA$はどちらも計算でき，それぞれ m 次対称行列，n 次対称行列になる。

証明. A を$m\times n$型行列とする。そうすると， ${}^tA$は$n\times m$型行列であり，A の列数と ${}^tA$の行数はともに n で等しく，$A\ {}^tA$が定義され，m 次正方行列になる。$B=A\ {}^tA$とおくと，前項で学んだ行列の積と転置操作の関係により，

$${}^tB=\ {}^t(A\ {}^tA)=\ {}^t(\ {}^tA)\ {}^tA=A\ {}^tA=B$$

となり, B は対称行列である。$A\ {}^tA$が定義され, m 次対称行列になることも同様に示される。

問 1.42. $\mathbf{1_3}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$に対して，$\mathbf{1_3}\ {}^t\mathbf{1_3}$と ${}^t\mathbf{1_3}\mathbf{1_3}$ を求めよ。

問 1.43. n 次列ベクトル$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\\vdots\\n\end{pmatrix}$ に対して，$\boldsymbol{x}\ {}^t\boldsymbol{x}$と ${}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}$ を求めよ。

ここで，ある行列とその転置行列との積の応用を１つ考えよう。O を原点とする座標平面上に２点P$(a,\ b)$， Q$(c,\ d)$があるとする。ベクトルを成分で表す際に，列ベクトルで，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\qquad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$$

と表すことにする。このとき，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2=a^2+b^2,\qquad \left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2=c^2+d^2,\qquad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=ac+bd$$

である。ここで，18 ページで学んだ，列ベクトルを並べて，行列を作る方法を用いて，

$$A=\begin{pmatrix}\overrightarrow{\mathrm{OP}} & \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$$

とおく。そうすると，

$${}^tAA=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+b^2 & ac+bd\\ ac+bd & c^2+d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 & \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} & \left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2\end{pmatrix}$$

となって，並べた列ベクトルの大きさや，内積が出てきている。特に，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|=1$のときには，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角をθとすると，

$${}^tAA=\begin{pmatrix}\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 & \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} & \left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \cos\theta\\ \cos\theta & 1\end{pmatrix}$$

となる。

例題 1.3. O を原点とする座標平面上に２点 P， Q があり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるとき，行列を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角θを求めよ。

解答．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を並べて$A = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\mathrm{OP}} & \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$とおくと，

$${}^{t}AA = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$$

である。このとき，

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|} = \frac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

なので，$\theta = \frac{3}{4}\pi$である。

問 1.44. O を原点とする座標平面上に２点 P,　Q があり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} \sqrt{6}+\sqrt{2} \\ \sqrt{6}-\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \begin{pmatrix} \sqrt{6}-\sqrt{2} \\ \sqrt{6}+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

であるとき，行列を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角θを求めよ。

話し合ってみよう．A を 2 次または 3 次の正方行列とする。${}^{t}AA = E$が成り立つとき，A の各列ベクトルはどのような関係にあるか，話し合ってみよう。

1.7.4　AB と BA

続いて，行列の積に交換法則が成り立つかどうか調べてみよう。A,　B がともに正方行列であれば，AB と BA の型は等しくなる。しかし，そうであったとしても，積の交換法則$AB = BA$が成り立つとは限らない。

例 1.13.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。このとき，

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

より $AB \neq BA$ であるが，その一方で，

$$AC = CA = \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

である。

この例のように，行列の積に関しては交換法則が成り立つ場合と成り立たない場合がある。そこで行列の積では，単に「A に B をかける」といういい方ではなく，「A に B を右からかける」とか，「A に B を左からかける」といった表現を用いるのである。$AB = BA$ が成り立つとき，A と B は交換可能であるという。

問 1.45. 次の５つの行列，A,　B,　C,　D,　E について，交換可能な異なる行列の組をすべていえ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例題 1.4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。このとき，

$$(A+B)^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\quad A^2+2AB+B^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$$

となり，いわゆる乗法公式が成立しない。この理由について説明せよ。
解答．分配法則を用いて $(A+B)^2$ を展開すると，
$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A(A+B)+B(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$
となる。AB について，

$$AB=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

で交換可能でないため，$AB+BA\neq 2AB$ である。その結果，

$$(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$$

となる。
問 1.46.

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

とする。このとき，$(A+B)(A-B)$ と A^2-B^2 の両方を計算し，

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

が成り立たないことを確認し，この理由について説明せよ。
　このように，行列の計算ではこれまで学習した多項式の展開公式が成り立たなくなることがあるので注意しよう。

1.7.5　$A\neq O$，　$B\neq O$でも$AB=O$となることがある！

3 次正方行列 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&5\\7&4&1\end{pmatrix}$ と 3×2 型行列 $B=\begin{pmatrix}1&-3\\-2&6\\1&-3\end{pmatrix}$を考えよう。

言うまでもなく，これらは零行列ではない。しかし，ABを計算すると，$AB=O$となる。
数の世界では，$a\neq 0$ かつ $b\neq 0$ であれば，$ab\neq 0$ となる。ところがこのように行列の世界では，$A\neq O$ かつ $B\neq O$ であっても，$AB=O$ となる場合がある。

問 1.47. $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$ に対して，$AX=O$ となる 2 次正方行列 X は一般に，

$$X=\begin{pmatrix}2s&2t\\-s&-t\end{pmatrix}\quad (s,\ t \text{ は実数})$$

と表されることを示せ。

例題 1.5. 太郎さんと花子さんは行列について会話をしている。
太郎：$A^2=E$となる行列って何だろう。2 乗を計算できるから正方行列だよね。
花子：因数分解して，$A^2-E=(A+E)(A-E)=O$ から考えたらいいと思うけど。
太郎：でも，行列の時は因数分解が気軽にできなかったと思うけど。
花子：確かに。でもそれは，行列の積の交換法則が成り立たないことが原因だったよね。
太郎：待てよ。単位行列 E は数の世界の 1 みたいなもので，$AE=EA=A$ だったから，A と E は交換可能だよ。
花子：あっ，そうだ。だから，$A^2-E=(A+E)(A-E)=O$ とできる！
太郎：そうしたら，$A=\pm E$ だね。
花子：私もそう思うのだけど，例えば，2 次正方行列の場合なら $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ も $A^2=E$ となるのよね。

太郎：一体どういうことだろう？

$A^2 - E = (A+E)(A-E) = O$ から，$A = \pm E$ とできない理由について説明せよ。

解答. 　行列の積に置いては，$A \neq O$，$B \neq O$ でも $AB = O$ となることがある。したがって，$A + E \neq O$ かつ $A - E \neq O$ であっても $(A+E)(A-E) = O$ となることがある。$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ の場合は，

$$(A+E)(A-E) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = O$$

となっている。

注意. 私たちは，これまで方程式を解く手段として，因数分解を頻繁に用いてきた。例えば，$x^2 - 5x + 6 = 0$ を解く場合には，$(x-3)(x-2) = 0$ と因数分解して，これが成り立つには，$x - 3 = 0$ または $x - 2 = 0$ であることから，$x = 2, 3$ という解を導いてきた。当たり前のように用いてきた方法であるが，これは実数や複素数が「$ab = 0$ ならば $a = 0$ または $b = 0$」という性質を持つからできた方法なのである。行列の世界では，この性質が成り立たないことが，方程式を因数分解で解けないことにつながっている。

話し合ってみよう. 2 次正方行列 A が，$A^2 = A$ を満たせば，A は零行列か単位行列に等しいといえるだろうか。話し合ってみよう。

1.8　逆行列

1.8.1　正則行列と逆行列

14 ページで学んだように，どのような行列に単位行列 E をかけても結果は変わらないので，E は数の世界における 1 に対応するものであった。数の世界では，0 でない数 a に対しては，その逆数 $\frac{1}{a}$ が存在した。ところが行列の世界では，$A \neq O$ であっても $AB = E$を満たす行列 B が存在するとは限らない。例えば，$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ とすると，この A に対しては $AB = E$ を満たす行列 B は存在しない。

この理由を考えてみよう。A の列の個数と B の行の個数が等しく，E が正方行列であることより，$AB = E$ を満たす行列 B が存在したとすると，B は 2 次正方行列，E は 2 次単位行列である。

そこで $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x + 2z & y + 2w \\ 2x + 4z & 2y + 4w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より，

$$x + 2z = 1, \quad 2x + 4z = 0$$

となるが，この式はどのような数 x, z に対しても成立しない。よって，$AB = E$ を満たす行列 B は存在しないのである。

n 次正方行列 A に対して，

$$AB = BA = E$$

を満たす n 次正方行列 B が存在するとき，A を**正則行列**，または A は**正則**であるという。ま

た，B を A の**逆行列**といい，A^{-1} と表す[4]。正則行列の逆行列はただ 1 つに定まることが知られている。また，$AB = BA = E$ という関係式において，B をもとに考えると，$A = B^{-1}$ であるともいえる。したがって，

$$A = B^{-1} = (A^{-1})^{-1}$$

が成り立つ。

例 1.14. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とする。このとき，$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ とすると，

$$AB = BA = E$$

となるので，A は正則行列である。したがって，$B = A^{-1}$ と表すことができる。
また，$A = B^{-1}$ でもある。

問 1.48. （1）$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して，$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ であることを確かめよ。

（2）$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ は正則行列ではないことを示せ。

1.8.2　正則でない行列

零行列 O にはどのような行列 A をかけても $OA = O$ なので，結果が単位行列になることはない。したがって，零行列は正則ではない。零行列以外の行列で正則でないものについて 30 ページの $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ をもとに考えてみよう。まず，A が正則ではないことを他の考え方を用いて示すことから始める。

A に零行列ではない $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ を右からかけると，

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O$$

となる。これをもとに，A が正則ではないことを，背理法により証明する。もし，A が正則であるとすれば，A^{-1} を $AB = O$ の両辺に左からかけることで，

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}O$$

$$(A^{-1}A)B = O$$

$$B = O$$

となる。これは $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおいたことに反する。

問 1.49. 上の説明では，A に右から行列 $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ をかけて A が正則ではないことを証明したが，左から行列 $C = (2 \quad -1)$ をかけても同様に証明できる。この方法で証明せよ。

$A = O$ の場合を含めて，以上を一般化することで，次のことがわかる。

> 正方行列 A に対し，$AB = O$ または $BA = O$ となる $B \neq O$ が存在すれば A は正則ではない。

[4] しばしば，これを「エィ，インヴァース」と読む。行列計算が行えるアプリや関数電卓などで「inv」や「inverse」とあれば，逆行列だと思えばよい。

例題 1.6. 3 次正方行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 4 & 0 & 5\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}$は正則ではないことを証明せよ。

解答. A に右から零ベクトルではない列ベクトル$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$をかけると，

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 4 & 0 & 5\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

となり，零ベクトルになる。よって，A は正則ではない。

一般に次が成り立つ。

> 行列 A を作る列ベクトルまたは行ベクトルの中に，零ベクトルである列ベクトルまたは行ベクトルがあれば，A は正則ではない。

問 1.50. 3 次正方行列$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}$は正則ではないことを証明せよ。

一般に次が成り立つ。

> 行列 A を作る列ベクトルまたは行ベクトルの中に，等しい列ベクトルまたは行ベクトルがあれば，A は正則ではない。

1.8.3　逆行列はただ１つに決まる　―発展―

30 ページで，正則行列の逆行列がただ 1 つに定まることを紹介した。発展的な話題になるが，このことを証明しよう。

> A を n 次正則行列とするとき，A の逆行列はただ 1 つに定まる。

証明. B とB'を，A の逆行列とすると，

$$B=EB=(B'A)B=B'(AB)=B'E=B'$$

となり，B とB'は一致する。

このように数学では，ある性質を満たすものがただ 1 つに定まるかどうかを考えることが多い。次の問いに挑戦してみよう。

問 1.51. どのような正方行列 A に対しても，$AX=XA=A$となる正方行列 X は単位行列 E 以外にないことを示せ。（ヒント：このような行列が，E とE'の２つあるとして，EE'を計算する。）

1.8.4　2 次正方行列の逆行列

ここまで正則行列や正則でない行列の性質を考えてきたが，与えられた正則行列の逆行列がどのような形をしているのかは，考えていなかった。ここでは，2 次正方行列が正則であるための条件を考え，逆行列を具体的に与えてみよう。

A を 2 次正則行列とし，$X=A^{-1}$をその逆行列とする。まず関係$AX=E$を満たす X について考える。$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，　$X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}$とおくと，

$$AX=\begin{pmatrix}ax+bz & ay+bw\\ cx+dz & cy+dw\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

より，

$$\begin{cases} ax+bz=1 \cdots\cdots ① \\ cx+dz=0 \cdots\cdots ② \end{cases} \qquad \begin{cases} ay+bw=0 \cdots\cdots ③ \\ cy+dw=1 \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

が成り立つ。ここから

$$\begin{aligned} &①\times d-②\times b &&\text{より}\quad (ad-bc)x=d \\ &-①\times c+②\times a &&\text{より}\quad (ad-bc)z=-c \\ &③\times d-④\times b &&\text{より}\quad (ad-bc)y=-b \\ &-③\times c+④\times a &&\text{より}\quad (ad-bc)w=a \end{aligned}$$

となる。ここでもし，$ad-bc=0$であれば，$a=b=c=d=0$となり，$A=O$ である。これは最初に A を正則とした仮定に反する。したがって，A が正則であるには，$ad-bc\neq 0$であることが必要である。このとき，

$$x=\frac{d}{ad-bc},\quad y=-\frac{b}{ad-bc},\quad z=-\frac{c}{ad-bc},\quad w=\frac{a}{ad-bc}$$

であり，

$$X=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

となる。

逆に$ad-bc\neq 0$のとき，$X=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$が定義され，

$$AX=E,\quad XA=E$$

を満たすことが直接の計算で確かめられる。よって A は正則で$X=A^{-1}$である。

2 次正方行列 A=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$に対し，$|A|=ad-bc$とおき，$A$ の**行列式**という。

行列式は英語で determinant といい，$|A|$は det$A$ とも書かれる。行列計算が行えるアプリや関数電卓などで det とあれば，行列式だと思えばよい。以上のことをまとめると次のようになる。

> 2 次正方行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$が正則であるための必要十分条件は$|A|\neq 0$であり，このとき，
>
> $$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
>
> である。

例 1.15. (1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$のとき，$|A|=1\cdot 3-2\cdot(-4)=11\neq 0$だから，

A は正則で，$A^{-1}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$である。

(2) $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$のとき，$|A|=2\cdot 6-(-3)\cdot(-4)=0$だから，$A$ は正則ではない。

問 1.52. 次の各行列の正則性を判定し，正則であれば逆行列を求めよ。ただし，aとxは実数とする。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$

1.8.5　対角行列の正則性と逆行列

3 次以上の正則行列に対して，その逆行列を求めるには，さらに進んだ数学が必要になる。

ただ，対角行列の正則性は容易に判定され，正則な場合には逆行列も容易に求められる。例えば，3 次対角行列$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$について考えてみよう。

$abc \neq 0$すなわち，どの対角成分も 0 でないとき，$B=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$ とおく。

そうすると，

$$AB=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{c} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{a}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{b}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{c}{c} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{c} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{a}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{b}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{c}{c} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。逆行列は存在すれば 1 つに定まるので，$abc \neq 0$のとき，A は正則で$B=A^{-1}$である。逆に，a，b，cのいずれかが 0 である場合は，1 つの列が零ベクトルになるので，正則ではない。一般に次が成り立つ。

> 対角行列 A が正則であるための必要十分条件は，対角成分に 0 を含まないことであり，A^{-1}は各対角成分の逆数を対応する順に並べたものになる。

問 1.53. 次の行列から正則な行列を選び，正則であるものについては逆行列を求めよ。

（1）$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$　（2）$\begin{pmatrix} 0.02 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 \end{pmatrix}$　（3）$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

ここで，12 ページで登場した花子さんの家での消費税額の計算を思い出してみよう。支払った消費税額の行列（左辺）は，月々の支出金額の行列（右辺）をもとに，

$$\begin{pmatrix} 5600 & 1100 \\ 5040 & 1300 \\ 5120 & 1400 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 75600 & 12100 \\ 68040 & 14300 \\ 69120 & 15400 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{0.08}{1.08} & 0 \\ 0 & \frac{0.1}{1.1} \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots ①$$

で計算できた。①式の中の行列$\begin{pmatrix} \frac{0.08}{1.08} & 0 \\ 0 & \frac{0.1}{1.1} \end{pmatrix}$に着目すると，

$$\begin{pmatrix} \dfrac{0.08}{1.08} & 0 \\ 0 & \dfrac{0.1}{1.1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{1.08} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1.1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.08 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1.08 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0.08 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

なので①式は，

$$\begin{pmatrix} 5600 & 1100 \\ 5040 & 1300 \\ 5120 & 1400 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 75600 & 12100 \\ 68040 & 14300 \\ 69120 & 15400 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0.08 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix} 0.08 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

と変形できる。上の式で，$\begin{pmatrix} 0.08 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$は税率を表す行列であるから，上の式は，

$$
\begin{aligned}
(\text{税額}) &= (\text{税込金額}) \div (1+\text{税率}) \times (\text{税率}) \\
&= (\text{税込金額}) \times \frac{1}{(1+\text{税率})} \times (\text{税率}) \\
&= (\text{税込金額}) \times (1+\text{税率})^{-1} \times (\text{税率})
\end{aligned}
$$

とまさに形の上でも数の場合と対応している。このように，逆行列を用いることで個々の数値の計算からデータの計算へと表現の幅も広がるのである。

1.8.6　置換行列の逆行列

1.5.3 項で，４つの 4 次列ベクトルを並べてできる行列

$$P = (\boldsymbol{e_3}\ \boldsymbol{e_2}\ \boldsymbol{e_4}\ \boldsymbol{e_1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を行列

$$A = \begin{pmatrix} 65 & 82 & 78 & 70 \\ 85 & 63 & 90 & 65 \\ 76 & 90 & 82 & 85 \end{pmatrix}$$

に右からかけることで，列の順序が入れ替わることをみた。ここでは，P の逆行列を考えてみよう。この入れ替えでは結果的に，A の 1 列目を 4 列目に，2 列目を 2 列目に，3 列目を 1 列目に，4 列目を 3 列目に移動しているのである。それと対応して，P の(1，4)成分，(2，2)成分，(3，1)成分，(4，3)成分にそれぞれ 1 が配置され，他の成分は 0 になっている。

移動された列をもとに戻す逆の移動は 4 列目を 1 列目に，2 列目を 2 列目に，1 列目を 3 列目に，3 列目を 4 列目に移動するものである。そうすると，これを実現するための行列 Q は(4，1)成分，(2，2)成分，(1，3)成分，(3，4)成分にそれぞれ 1 が配置され，他の成分は 0 の

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である。移動することの意味を考えると，$Q = P^{-1}$であるが，Qの 1 の場所は P の行と列の場所を入れ替えて作られているので，$Q = {}^tP$である。

一般に各行各列に 1 が 1 つずつ配置され，残りの成分がすべて 0 である行列を置換行列という，単位行列も置換行列である。単位行列以外の置換行列を行列に右からかけると列の順序が，左からかけると行の順序が入れ替わる[5]。上の例を一般的に考えることにより，次が成り立つ。

> 置換行列 P は正則で，$P^{-1} = {}^tP$が成り立つ。

問 1.54. 次の行列の逆行列を求めよ。

（1）$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　（2）$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　（3）$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

注意. ここまで，2 次正方行列や置換行列，対角行列に対して正則性と逆行列を考えた。3 次以上の一般の正則行列に対して，その逆行列の形を表示することは可能であるが，さらに進んだ数学が必要になる。実際の計算にも，しばしばコンピュータを用いる。しかし，特別な行列だけでも逆行列の形を理解できることは，行列に対しての「慣れ」につながる。

[5] 「置換」とは並べ替えることである。何も並べ替えないものも「置換」と考え，単位行列も置換行列として扱う。

第 2 章　行列の応用

2.1　連立一次方程式

行列の応用として，まず連立 1 次方程式を考えてみよう。

2.1.1　連立 1 次方程式を 1 次方程式とみる見方

例えば，連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2x+5y=3 \\ 3x+4y=-1 \end{cases}$$

を考えてみよう。これは行列を用いることで，

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と表すことができる。このように行列を用いて連立 1 次方程式を表したときに，係数部分の行列$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$を係数行列という。ここで，

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とおく。そうすると，元の連立 1 次方程式は，

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

という形になる。この形は x のみを未知数とする 1 次方程式$ax=b$と同じ形である。A は定数の集まりなので，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$は未知数の列ベクトル $\boldsymbol{x}$ の 1 次方程式と解釈することができる。

この例は，未知数が 2 つの連立 1 次方程式であるが，もっと未知数が増えても，係数の集まりを行列とし，未知数の集まりを列ベクトルとすることで，$\boldsymbol{x}$ の 1 次方程式$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$の形で連立 1 次方程式が表現されるのである。

問 2.1. 次の連立 1 次方程式を，行列を用いて表せ。（解く必要はない。）

（1）$\begin{cases} -4x-y=3 \\ 5x+3y=-2 \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x+y=3 \\ y-3z=7 \\ 2z-3x=-3 \end{cases}$

2.1.2　逆行列を用いて連立 1 次方程式を解く

先ほどの連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を逆行列を用いて次のように解くことができる。この式の両辺に左から，

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

をかけると，

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 17 \\ -11 \end{pmatrix}$$

よって，

$$x = -\frac{17}{7}，\quad y = \frac{11}{7}$$

一般に次が成り立つ。

> 連立 1 次方程式を，行列を用いて$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$と表したとき，$A$ が正則であれば，
> その解は$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$で得られる。

注意. このことは，$a \neq 0$のときに，x の方程式$ax = b$の解が$x = a^{-1}b$と表されることと，同じ仕組みをしている。

問 2.2. 次の方程式を係数行列の逆行列を用いることにより解け。

(1) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x - 4y = -2 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 2y = 10 \end{cases}$

2.1.3　係数行列が正則でない場合

続いて次の２つの方程式を考えてみよう。

(ⅰ)$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x - 6y = 0 \end{cases}$　　(ⅱ)$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x - 6y = 2 \end{cases}$

文字を消去する方針で解いてみよう。方程式(ⅰ)では，第 1 式を 3 倍して第 3 式を引くと$0 = 0$になり，結局$x - 2y = 0$だけが残る。よって解は，

$$x = 2t,\quad y = t \qquad (t \text{ は実数})$$

となる。一方，方程式(ⅱ)では，第 1 式を 3 倍して第 3 式を引くと$\mathbf{0 = 1}$になりこの方程式を同時に満たす $x,\ y$ が存在しないことになる。

これらの方程式は，解が 1 つに定まる方程式と何が異なっているのだろうか。そのことを調べるために，これらの方程式を行列で表してみよう。そうすると，

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

となる。係数行列はどちらも同じである。ここで，係数行列$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$の行列式を計算すると，$1\times(-6)-(-2)\times 3 = 0$ となり，正則ではないことがわかる。

このように係数行列が正則でない場合には，解が複数存在したり，解が存在しなかったりするのである。

問 2.3. 次の方程式を行列で表し，係数行列が正則でないことを確かめよ。また。これらの方程式を解け。

（1）$\begin{cases} -x+3y=0 \\ 2x-6y=0 \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 2x+2y=0 \\ -5x-5y=0 \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x-y=1 \\ -3x+3y=-3 \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} 2x+y=5 \\ 4x+2y=8 \end{cases}$

2.2　行列のべき乗と数列への応用

正方行列のべき乗は様々な場面で利用される。実際にありそうな場面からその利用法を考えてみよう。

2.2.1　連立漸化式

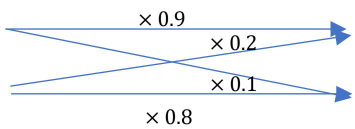
今ではインターネットで買い物をすることが，ごく普通になってきている。買い物をするときには，１つのサイトだけではなく，別のサイトに移ったり，また元のサイトに戻ってきたりと，いくつかのサイトを渡り歩くことがしばしばである。例えば，今あるサイトにいる人が，一定時間ごとに別のサイトに移る（あるいはそのまま留まる）確率がわかっているとき，最終的には各サイトにどれくらいの割合で人が流れるか，といった問題について行列を使って考えてみたい。実際にこのような問題を扱うときには，サイトの数はかなり多くなる。それは行列の型が大きくなるということである。ここでは考え方を理解することを目的として，サイトの数を２つにして考えてみよう。

例えば，ある商品が，ネット上の A，B というサイトで扱われているとする。そして調査の結果次のことがわかっているとしよう。

- ある時刻にサイト A を訪れたユーザーが，10 秒後に A に止まる確率は 90%で，10%はサイト B に移動している。
- ある時刻にサイト B を訪れたユーザーが，10 秒後に B に止まる確率は 80%で，20%はサイト A に移動している。

0 秒の時点でサイト A を 100 人が，サイト B を 200 人が訪れているとする（初期値）。この人たちが 10 秒ごとに２つのサイトにどのように分布しているか考えてみよう。ただし，0 秒の時点にいずれかのサイトを訪れたユーザーは，この間この２つのサイトから出ないものとする。

それぞれのサイトを訪れている人数	$10m$秒		$10(m+1)$秒
A	a_m		a_{m+1}
B	b_m		b_{m+1}



m を 0 以上の整数とする。10m 秒の時点で A，B を訪れているユーザー数をa_m人，b_m人とする。そうすると調査結果から, 時刻に伴って変化する数列$\{a_m\}$と$\{b_m\}$ができて, $a_0 = 100$, $b_0 = 200$および,

$$\begin{cases} a_{m+1} = 0.9a_m + 0.2b_m \\ b_{m+1} = 0.1a_m + 0.8b_m \end{cases}$$

を満たす。これは一種の漸化式であるが，２つの数列をまたがって表現されたもので，連立漸化式といわれる。その形は連立 1 次方程式と似ている。そのため行列を用いて,

$$\begin{pmatrix} a_{m+1} \\ b_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix}$$

と表せる。ここで，$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$とおくと，10$m$ 秒後の人数の分布は,

$$\begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_{m-1} \\ b_{m-1} \end{pmatrix} = A\left(A\begin{pmatrix} a_{m-2} \\ b_{m-2} \end{pmatrix}\right) = A^2\begin{pmatrix} a_{m-2} \\ b_{m-2} \end{pmatrix} =$$

$$\cdots = A^{m-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = A^m\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = A^m\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$$

で計算することができる。最後の式には，A^m乗が登場している。そこで続いて，行列のべき乗を考えてみよう。

注意．上の行列 A は行ベクトルの和が,

$$(0.9 \quad 0.2) + (0.1 \quad 0.8) = (1 \quad 1)$$

と，すべての成分が 1 の行ベクトルになる。このように，行ベクトルの和が 1 だけの行ベクトルとなる行列を確率行列という。確率行列は，分布状態の変化を表すときなどに現れる重要な行列である。

2.2.2　行列のべき乗

すでに私たちは，対角行列のべき乗が簡単に求められることを 25 ページで学んでいるので，この考え方をもとに行列のべき乗を求めることを考える。

例題 2.1. $A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$,　$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$とおく。このとき,

（1）　$B = P^{-1}AP$とおく。Bを求めよ。

（2）　A^mを求めよ。

解答．（1）$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$なので,

$$B = P^{-1}AP = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.7 & -1.4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}$$

（2）$B^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 1^m & 0 \\ 0 & 0.7^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7^m \end{pmatrix}$であり，一方

$$B^m = (P^{-1}AP)^m = \underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{m\text{ 個の積}}$$

$$= P^{-1}A(PP^{-1})A(P\cdots P^{-1})AP = P^{-1}A^mP$$

となるので,

$$A^m = PB^mP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7^m \end{pmatrix}\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0.7^m \\ 1 & -0.7^m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 + 0.7^m & 2 - 2\cdot 0.7^m \\ 1 - 0.7^m & 1 + 2\cdot 0.7^m \end{pmatrix}$$

例題 2.1 では B が対角行列になった。一般に，正方行列 A に対して，正則行列 P を用いて，$P^{-1}AP$を計算し，対角行列に変形することを，A を**対角化**するという。対角化は常にできるとは限らない。しかし対角化できる場合，結果の行列の対角成分に並ぶ数値は（並び順は変わることがあっても）常に同じであることが知られている。

さて例題 2.1 の結果をもとに，10m 秒後にそれぞれのサイトを訪れている人数を求めてみよう。それは，

$$A^m\begin{pmatrix}100\\200\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2+0.7^m & 2-2\cdot0.7^m\\1-0.7^m & 1+2\cdot0.7^m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100\\200\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}200-100\cdot0.7^m\\100+100\cdot0.7^m\end{pmatrix}$$

より，10m 秒後にサイト A には，$200-100\cdot0.7^m$人，サイト B には，$100+100\cdot0.7^m$人が訪れていることがわかる。0.7^mがあってイメージが湧きにくいが，具体的な数値を代入してみると，

m	1	3	5	7	9	12
サイト A	130	166	183	192	196	199
サイト B	170	134	117	108	104	101

となる。この設定では，$m=12$だと 2 分後ということになるが，この時点でサイト A，B を訪れている人の数は，最初の 100 人，200 人からほぼ逆になってしまっているのがわかる。

話し合ってみよう．上の結果を元にして，考えたことを話し合おう。また，最初にそれぞれにサイトを訪れた人数a_0とb_0を変化させて見て，どういう結果になるか調べ，気づいたことや考えたことを話し合ってみよう。

注意．39 ページの連立漸化式を解くだけなら，簡単な方法はある。例えば，２つのサイトを訪れている人数の合計は 300 人なのでどのような負でない整数 m に対しても，$a_m+b_m=300$が成り立つ。これを上の式に代入すると，$a_{m+1}=0.7a_m+60$となるので，これを解けば計算できる。ただ，行列を使うよさは，見通しが良くなる点や連立している漸化式の個数が増えても同じ構造に見える点などがある。

問 2.4. $A=\begin{pmatrix}0.8 & 0.25\\0.2 & 0.75\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}5 & 1\\4 & -1\end{pmatrix}$とおく。このとき，

（1）　$B=P^{-1}AP$とおく。B を求めよ。

（2）　A^mを求めよ。

（3）　X 高校の卒業生は，毎年同期会費を集めている。しかし，全員が協力してくれるわけではない。これまでの経験から，前年に会費を払ってくれた人が，引き続き会費を払ってくれる確率は 80%で，前年に会費を支払ってくれなかった人が，引き続き会費を支払わない確率は 75%であるという調査結果がある。ある年に卒業した 450 名のうち，400 名が会費を払い，50 名が払わなかった。上記の調査結果がこの年の卒業生にも適応できるとして，m 年後に同期会費を払っている人数を推定せよ。

問 2.5. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\-2 & 4\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$とおく。このとき，

（1）　$B=P^{-1}AP$とおく。B を求めよ。

（2）　A^mを求めよ。

（3）　自然数 n に対して，数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$が，

$$\begin{cases}a_{n+1}=a_n+b_n\\b_{n+1}=-2a_n+4b_n\end{cases}$$

を満たし，a_1=1，b_1=0 であるとき，数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

2.2.3　隣接 3 項間の漸化式

例題 2.2.　次の会話を読んで，以下の問いに答えよ。

太郎：問 2.5 の(3)なんだけど，(1)，(2)を使わなくても，解けるよね。

花子：私もそう思う。上の式から$b_n = a_{n+1} - a_n$を作って，下の式に「代入」する。そうすると，$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$となるから，これを解くのよね。

太郎：そう。だから，行列なんていらないっていうんじゃなくてさぁ，それなら逆に，$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$を行列を使って解けないのかと思うわけ。

花子：面白いことをいうね。でも，元の連立漸化式に戻すのも大変そうだし，何かうまい方法ってあるのかな。

太郎：$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$だから，行列を無理やり使って，

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ \square & \square \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

とまではできるけど，□のところが埋まらない。

花子：あっ，それならこんなのはどう？

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

太郎：なるほど。そうしたら，これもありかな。

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

(1)　花子の 1 つ目の発言にある式 $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$を得る計算を説明せよ。

(2)　太郎の最後の発言にある式を用いて，$a_1 = 1$，$a_2 = 1$で，

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

を満たす数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。ただし，$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$とおくとき，$P^{-1}AP$は対角行列になることを用いよ。

(3)　花子も行列を用いた式を作っているが，その式ではうまく処理できない理由を説明せよ。

解答.（1）n を 1 以上の自然数とすると，上の式から，

$$b_n = a_{n+1} - a_n\ ,\quad b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1}$$

が得られる。これを下の式に代入して整理すると，

$$a_{n+2} - a_{n+1} = -2a_n + 4(a_{n+1} - a_n)$$
$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$$

となる。

(2) 順に数列の項番号を下げることで，

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = A^n \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

となる。また，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

なので，

$$\begin{aligned} A^n &= P\left(P^{-1}AP\right)^n P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。したがって，

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A^{n-1}\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^n + 3^n & 3\cdot 2^n - 2\cdot 3^n \\ -2^{n-1} + 3^{n-1} & 3\cdot 2^{n-1} - 2\cdot 3^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n \\ 2^n - 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

よって，$a_n = 2^n - 3^{n-1}$

(3)

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

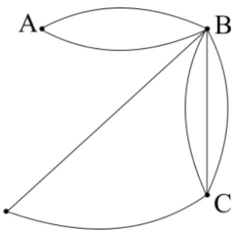
の左辺の 2 つの成分については，項の番号差が 2 であり，右辺の列ベクトルの 2 つの成分では，項の番号差が 1 である。そのため，同じ$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$を用いて，$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$の項番号をさらに下げることができないから。

問 2.6.　(1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$P = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$とおく。このとき，$B = P^{-1}AP$を計算し，それを用いて$A^m$を求めよ。

(2) n を自然数とするとき，$a_1 = \alpha$，$a_2 = \beta$で $a_{n+2} = -a_{n+1} + 6a_n$を満たす数列$\{a_n\}$を求めよ。

2.3 行列の場合の数への応用

ここでは，行列の積を使った簡単な応用を考えてみよう。17 ページの例 1.11 を再び取り上げる。すなわち，4 地点 A，B，C，D を結ぶ幹線道路を図のように整備するのである。

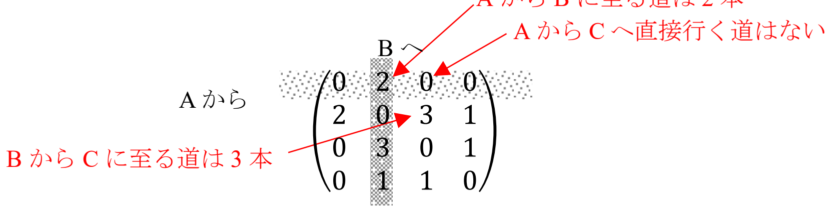


A，B，C，D の 4 点を結ぶ幹線道路のようす

このとき，4 地点を結ぶ幹線道路の情報から作った行列は，

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であった。この行列を M としよう。行列 M は各地点を結ぶ幹線道路の本数を表しているのであるが，例えば，(1，2) 成分の 2 であれば，A から B に至る道路の本数が 2 本であることを表している。同様に，(1，3) 成分の 0 は，A から C に直接至る道路がないことを，(3，2) 成分の 3 は，C から B に直接至る道路の本数が 3 本であることを表している。この考え方にもとづくと，第 1 行は，A から出ている道の本数のデータ，第 2 列は，B に直接続いている道の本数のデータを表している。



では，道路を 2 本，3 本…と通って，A から C に至る行き方は何通りあるだろうか。例

えば，道路を 2 本通って，A から C に至る場合を考えよう。図を見れば答えはすぐにわかるが，一旦次のように考えてみよう。すべての場合を考えるのである。そうすると，途中に A，B，C，D を経由する場合を考えることになる。すなわち，

$$A \to A \to C, \qquad A \to B \to C, \qquad A \to C \to C, \qquad A \to D \to C$$

の 4 通りを考えるのである。この場合の総数は，場合の数で学んだ積の法則と和の法則を用いて，

$$0 \times 0 + 2 \times 3 + 0 \times 0 + 0 \times 1 = 6$$

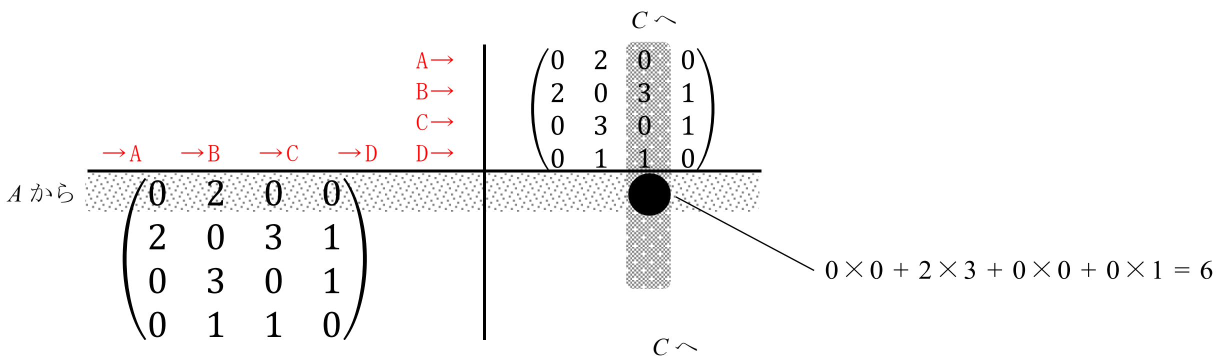
となる。また，B から C に至る場合なら，

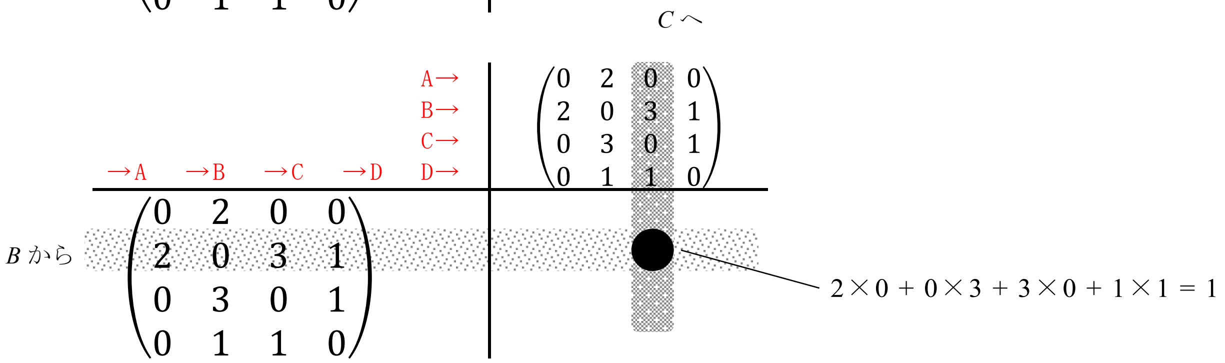
$$B \to A \to C, \qquad B \to B \to C, \qquad B \to C \to C, \qquad B \to D \to C$$

の 4 通りを考え，

$$2 \times 0 + 0 \times 3 + 3 \times 0 + 1 \times 1 = 1$$

となる。実は下に見るように，この計算が行列の 2 乗に対応しているのである。





　他の成分についても同様に成り立ち，

$$M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 14 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 10 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

は各地点から他の地点に 2 本の道を通って行く行き方の場合の数を並べたものになっている。そして，$M^3 = M^2M$であるから，

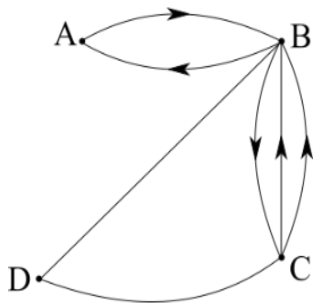
$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 28 & 2 & 6 \\ 28 & 6 & 45 & 15 \\ 2 & 45 & 6 & 11 \\ 6 & 15 & 11 & 6 \end{pmatrix}$$

は各地点から他の地点に 3 本の道を通って行く行き方の場合の数を並べたものになっている。一般に，点とその間を結ぶ線からなる図形をグラフ，そのグラフの点から点への間の道の本数の情報を示した行列をそのグラフの隣接行列という。この例

のように，隣接行列の m 乗を用いてある点からある点へ，m 本の道を通って行く方法の総数を求めることができる。なお，この例での M は対称行列であったが，点と点とを結ぶ線が一方通行の場合には，対称行列にはならない。

問 2.7.（1）A から D まで合計 4 本の道を通って行く方法の総数を求めよ。
（2）A から D まで行くのに通る道が 4 本以下である行き方の総数を求めよ。

<u>**話し合ってみよう**</u>．道路の工事は，事情があって遅れてしまった。そのため，現在，ある区間の道路は一方通行で開通している。矢印が書かれているのが一方通行の道路である。このとき，同様に隣接行列を考えて，2 乗，3 乗 ⋯ とすると何が得られるかを話し合ってみよう。

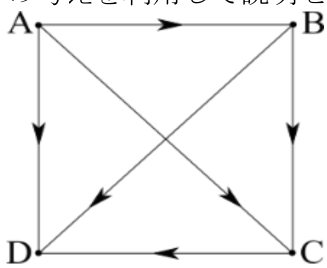


・矢印のところは一方通行
・矢印がなければ双方に通行可

問 2.8.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^4 = O$$

であることを，次の道の行き方の考えを利用して説明せよ。



2.4　データの分析への応用

1.5 節で行列を用いた表の操作について学んだ。ここでは，さらに進んだ行列を利用した表の操作（データの操作）について学ぼう。

$$A = \begin{pmatrix} 65 & 82 & 78 & 70 \\ 85 & 63 & 90 & 65 \\ 76 & 90 & 82 & 85 \end{pmatrix}$$

すなわち，元の表として，

１学期	国語	数学	英語	理科
X さん	65	82	78	70
Y さん	85	63	90	65
Z さん	76	90	82	85

をもとに考える。国語，数学，英語，理科の成績を表す変量をそれぞれ，k，m，e，r としよう。

2.4.1　各科目の平均点（各列の平均値）

国語（k），数学（m），英語（e），理科（r）ごとに平均点を求めてみよう。22 ページの 1.5.6 項で学んだ教科ごとの点数の和をもとに考える。行列の言葉で表現すると，すべての行を加えて，行数（今の場合は 3）で割ればよいので，

$$\left(\bar{k},\ \bar{m},\ \bar{e},\ \bar{r}\right) = \frac{1}{3}\ {}^t\mathbf{1}_3 A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 226 & 235 & 250 & 220 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{226}{3} & \frac{235}{3} & \frac{250}{3} & \frac{220}{3} \end{pmatrix}$$

となる。

問 2.9. この 3 名の２学期の成績の表

２学期	国語	数学	英語	理科
X さん	71	86	70	64
Y さん	83	71	82	75
Z さん	76	88	74	85

から作られる行列

$$B = \begin{pmatrix} 71 & 86 & 70 & 64 \\ 83 & 71 & 82 & 75 \\ 76 & 88 & 74 & 85 \end{pmatrix}$$

を用いて，教科ごとの平均点を計算する式を作り，計算せよ。

2.4.2　偏差を表す行列を求める

各列の成分から，各列の平均を引くことで，平均との差（偏差）を表す行列を求めよう。つまり，$A = \begin{pmatrix} 65 & 82 & 78 & 70 \\ 85 & 63 & 90 & 65 \\ 76 & 90 & 82 & 85 \end{pmatrix}$ から，

$$\frac{1}{3}\ {}^t\mathbf{1}_3 A = \begin{pmatrix} \frac{226}{3} & \frac{235}{3} & \frac{250}{3} & \frac{220}{3} \end{pmatrix}$$

を 3 段に積んで得られる 3 行 4 列の行列を引く（引き算を行う）。

同じ行ベクトルを 3 段に積んだ行列を作るには，11 ページの例 1.7 (5) が役に立つ。つま

り，$\mathbf{1}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$を平均の行ベクトルに左からかければ得られ，

$$\mathbf{1}_3\left(\frac{1}{3}\ {}^t\mathbf{1}_3A\right)=\mathbf{1}_3\begin{pmatrix}\frac{226}{3} & \frac{235}{3} & \frac{250}{3} & \frac{220}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{226}{3} & \frac{235}{3} & \frac{250}{3} & \frac{220}{3}\\ \frac{226}{3} & \frac{235}{3} & \frac{250}{3} & \frac{220}{3}\\ \frac{226}{3} & \frac{235}{3} & \frac{250}{3} & \frac{220}{3}\end{pmatrix}$$

となる。したがって，偏差を表す行列は E を単位行列として，

$$A-\mathbf{1}_3\left(\frac{1}{3}\ {}^t\mathbf{1}_3A\right)=EA-\frac{1}{3}\mathbf{1}_3\ {}^t\mathbf{1}_3A=\left(E-\frac{1}{3}\mathbf{1}_3\ {}^t\mathbf{1}_3\right)A$$

という計算で求められる。この計算をもとに実際に計算すると，偏差の行列

$$\begin{pmatrix}65-\bar{\mathrm{k}} & 82-\bar{m} & 78-\bar{e} & 70-\bar{r}\\ 85-\bar{k} & 63-\bar{m} & 90-\bar{e} & 65-\bar{r}\\ 76-\bar{k} & 90-\bar{m} & 82-\bar{e} & 85-\bar{r}\end{pmatrix}$$

は，

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}65 & 82 & 78 & 70\\ 85 & 63 & 90 & 65\\ 76 & 90 & 82 & 85\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{31}{3} & \frac{11}{3} & -\frac{16}{3} & -\frac{10}{3}\\ \frac{29}{3} & -\frac{46}{3} & \frac{20}{3} & -\frac{25}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{35}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{35}{3}\end{pmatrix}$$

となる。このようにして得られた結果を A の列ベクトルの平均偏差行列という。すなわち，平均偏差行列とは，行列 A の各列ベクトルからその成分の平均を引いて得られた行列である。各列の成分の和を計算して，すべて 0 になっていることを確かめてみるとよい。

問 2.10.　２学期の成績の行列

$$B=\begin{pmatrix}71 & 86 & 70 & 64\\ 83 & 71 & 82 & 75\\ 76 & 88 & 74 & 85\end{pmatrix}$$

の列ベクトルの平均偏差行列を求めよ。

ところで，

$$Q_3=E-\frac{1}{3}\mathbf{1}_3\ {}^t\mathbf{1}_3$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

とおくと，これは対称行列であることがわかる。また，

$$(Q_3)^2=\left(E-\frac{1}{3}\mathbf{1}_3\ {}^t\mathbf{1}_3\right)^2$$

$$=\left(E-\frac{1}{3}\mathbf{1}_3\ {}^t\mathbf{1}_3\right)E-\left(E-\frac{1}{3}\mathbf{1}_3\ {}^t\mathbf{1}_3\right)\frac{1}{3}\mathbf{1}_3\ {}^t\mathbf{1}_3$$

$$=E-\frac{2}{3}\mathbf{1}_3\ {}^t\mathbf{1}_3+\frac{1}{9}\mathbf{1}_3\left({}^t\mathbf{1}_3\mathbf{1}_3\right){}^t\mathbf{1}_3$$

最後の式の第 3 項の（　）内について，${}^{\mathrm{t}}\mathbf{1}_3\mathbf{1}_3=3$であるから，

$$=E-\frac{2}{3}\mathbf{1}_3\ {}^t\mathbf{1}_3+\frac{3}{9}\mathbf{1}_3\ {}^t\mathbf{1}_3$$

$$
\begin{aligned}
&= E - \frac{1}{3}\mathbf{1}_3\ {}^t\mathbf{1}_3 \\
&= Q_3
\end{aligned}
$$

となり，$Q_3^2 = Q_3$が成り立つ[6]。

問 2.11. $Q_2 = E - \frac{1}{2}\mathbf{1}_2\ {}^t\mathbf{1}_2$とおくと，$Q_2$は対称行列であり$Q_2^2 = Q_2$ が成り立つことを，実際に Q_2 を計算してそれを用いて確認せよ。

問 2.12. Q_2，Q_3 は，すべての行ベクトルの和もすべての列ベクトルの和もともに零ベクトルになることを確認せよ。

2.4.3　分散共分散行列

平均偏差行列をもとに，4 つの教科の分散と共分散が現れる行列を作成してみよう。これまでの例では，

$$
Q_3A = \begin{pmatrix} -\frac{31}{3} & \frac{11}{3} & -\frac{16}{3} & -\frac{10}{3} \\ \frac{29}{3} & -\frac{46}{3} & \frac{20}{3} & -\frac{25}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{35}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{35}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65-\bar{k} & 82-\bar{m} & 78-\bar{e} & 70-\bar{r} \\ 85-\bar{k} & 63-\bar{m} & 90-\bar{e} & 65-\bar{r} \\ 76-\bar{k} & 90-\bar{m} & 82-\bar{e} & 85-\bar{r} \end{pmatrix}
$$

であり，各列は各教科での成績の偏差の集まりであった。したがって，これをもとにそれぞれの科目の分散や，２つの科目での共分散を計算できる。このことを順に考えていこう。

まず，上で得られた平均偏差行列にその転置行列を左からかけて ${}^t(Q_3A)Q_3A$ を計算してみよう。(ここでは，見やすさのため，表計算の形式で書く。青いところがQ_3A，黄色いところが ${}^t(Q_3A)$，オレンジ色のところが ${}^t(Q_3A)Q_3A$ に当たっている。) 27 ページで学んだことにより，この行列は対称行列である。

				国語(k)	数学(m)	英語(e)	理科(r)
				$65-\bar{k}$	$82-\bar{m}$	$78-\bar{e}$	$70-\bar{r}$
				$85-\bar{k}$	$63-\bar{m}$	$90-\bar{e}$	$65-\bar{r}$
				$76-\bar{k}$	$90-\bar{m}$	$82-\bar{e}$	$85-\bar{r}$
国語(k)	$65-\bar{k}$	$85-\bar{k}$	$76-\bar{k}$	$3s_k^2$	$3s_{km}$	$3s_{ke}$	$3s_{kr}$
数学(m)	$82-\bar{m}$	$63-\bar{m}$	$90-\bar{m}$	$3s_{mk}$	$3s_m^2$	$3s_{me}$	$3s_{mr}$
英語(e)	$78-\bar{e}$	$90-\bar{e}$	$82-\bar{e}$	$3s_{ek}$	$3s_{em}$	$3s_e^2$	$3s_{er}$
理科(r)	$70-\bar{r}$	$65-\bar{r}$	$85-\bar{r}$	$3s_{rk}$	$3s_{rm}$	$3s_{re}$	$3s_r^2$

${}^t(Q_3A)Q_3A$（オレンジ色のところ）に着目してみよう。例えば，(1,　1)　成分は，

$$
(65-\bar{k})^2 + (85-\bar{k})^2 + (76-\bar{k})^2
$$

である。変量 k の分散をs_k^2とおくと，変量 k には 3 個の数値が含まれていることより，

$$
s_k^2 = \frac{1}{3}\left\{(65-\bar{k})^2 + (85-\bar{k})^2 + (76-\bar{k})^2\right\}
$$

である。したがって，

$$
(65-\bar{k})^2 + (85-\bar{k})^2 + (76-\bar{k})^2 = 3s_k^2
$$

である。同様に，${}^t(Q_3A)Q_3A$ の対角成分には分散の 3 倍が並んでいる。

6　$Q_3^2 = Q_3$の確認は，実際の行列を 2 乗しても確かめられるが，ここでは，行列計算で処理する方法を紹介した。

今度は対角成分以外に着目しよう。例えば，(1，2) 成分は，

$$\left(65-\bar{k}\right)(82-\bar{m})+\left(85-\bar{k}\right)(63-\bar{m})+\left(76-\bar{k}\right)(90-\bar{m})$$

である。変量 k と変量 m との共分散をs_{km}とおくと，これらの変量には 3 個の数値が含まれていることより，

$$s_{km}=\frac{1}{3}\left\{\left(65-\bar{k}\right)(82-\bar{m})+\left(85-\bar{k}\right)(63-\bar{m})+\left(76-\bar{k}\right)(90-\bar{m})\right\}$$

である。したがって，

$$\left(65-\bar{k}\right)(82-\bar{m})+\left(85-\bar{k}\right)(63-\bar{m})+\left(76-\bar{k}\right)(90-\bar{m})=3s_{km}$$

である。同様に，${}^{t}\!\left(Q_3A\right)Q_3A$　の対角成分以外には共分散の 3 倍が並んでいる。先の表はその様子を表している。

ここで，$Q_3^2=Q_3$ を用いて，${}^{t}\!\left(Q_3A\right)Q_3A$ を変形すると，

$${}^{t}\!\left(Q_3A\right)Q_3A={}^{t}\!A\,{}^{t}\!Q_3Q_3A={}^{t}\!AQ_3^2A={}^{t}\!AQ_3A$$

となる。したがって，$\frac{1}{3}\,{}^{t}\!AQ_3A$ を考えると，その $(i,\ i)$ 成分は第 i 列の分散，$i\neq j$ のとき $(i,\ j)$ 成分は第 i 列と第 j 列との共分散になっている。このような行列を A の列ベクトルの分散共分散行列（または単に分散共分散行列）という。ここではV_Aで表す。

実際にこの 4 つの教科の例で分散共分散行列を求めてみると，次のようになる。すべて小数第 2 位までの概数で求めている。

$$\frac{1}{3}\,{}^{t}\!AQ_3A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}65&85&76\\82&63&90\\78&90&82\\70&65&85\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{31}{3}&\frac{11}{3}&-\frac{16}{3}&-\frac{10}{3}\\\frac{29}{3}&-\frac{46}{3}&\frac{20}{3}&-\frac{25}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{35}{3}&-\frac{4}{3}&\frac{35}{3}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}66.89&-59.44&39.56&-12.78\\-59.44&128.22&-45.78&83.89\\39.56&-45.78&24.89&-17.78\\-12.78&83.89&-17.78&72.22\end{pmatrix}$$

注意．行列の計算ができるアプリがあるので，実際に計算を実行するなら，それらを活用するのがよい。

問 2.13.　２学期の成績の行列

$$B=\begin{pmatrix}71&86&70&64\\83&71&82&75\\76&88&74&85\end{pmatrix}$$

の列ベクトルの分散共分散行列を求めよ。

2.4.4　相関行列

前項で得られた 4 教科についての分散共分散行列は，

$$V_A=\begin{pmatrix}s_k^2&s_{km}&s_{ke}&s_{kr}\\s_{mk}&s_m^2&s_{me}&s_{mr}\\s_{ek}&s_{em}&s_e^2&s_{er}\\s_{rk}&s_{rm}&s_{re}&s_r^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}66.89&-59.44&39.56&-12.78\\-59.44&128.22&-45.78&83.89\\39.56&-45.78&24.89&-17.78\\-12.78&83.89&-17.78&72.22\end{pmatrix}$$

であった。例えば，変量 k と m の相関係数r_{km}は$r_{km}=\frac{s_{km}}{s_ks_m}$で計算できる。つまり，$V_A$の (1，2) 成分$s_{km}$を標準偏差の積$s_ks_m$で割れば計算できる。他についても同様に考えると，下

の表のように割っていけばよい。

	s_k で割る ↓	s_m で割る ↓	s_e で割る ↓	s_r で割る ↓
s_k で割る →	s_k^2	s_{km}	s_{ke}	s_{kr}
s_m で割る →	s_{mk}	s_m^2	s_{me}	s_{mr}
s_e で割る →	s_{ek}	s_{em}	s_e^2	s_{er}
s_r で割る →	s_{rk}	s_{rm}	s_{re}	s_r^2

　このような操作は行列を用いて行える。対角成分に A の列ベクトルの標準偏差を並べた対角行列

$$S_A = \begin{pmatrix} s_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_r \end{pmatrix}$$

を考える。いずれの標準偏差も 0 でなければ，34 ページで学んだように，対角行列の逆行列は各対角成分の逆数を並べればできるので，

$$S_A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s_k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s_e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s_r} \end{pmatrix}$$

である。V_Aの両側からこのS_A^{-1}をかけることで，V_Aの各行，各列にそれぞれの標準偏差の逆数がかけられて，

$$S_A^{-1} V_A S_A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & r_{km} & r_{ke} & r_{kr} \\ r_{mk} & 1 & r_{me} & r_{mr} \\ r_{ek} & r_{em} & 1 & r_{er} \\ r_{rk} & r_{rm} & r_{re} & 1 \end{pmatrix}$$

となる。ただし，r_{km} は変量 k と m の間の相関係数を表し，他も同様である。このようにして得られた，列ベクトルの間の相関係数の並んだ行列を A の列ベクトルの相関行列（または単に相関行列）といい，R_Aと表す。

　この例で実際に計算してみると，

$$S_A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.122 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0883 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.118 \end{pmatrix}$$

として，

$$R_A = S_A^{-1} V_A S_A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0.64 & 0.97 & -0.18 \\ -0.64 & 1 & -0.81 & 0.87 \\ 0.97 & -0.81 & 1 & -0.42 \\ -0.18 & 0.87 & -0.42 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

問 2.14.　2 学期の成績の行列

$$B = \begin{pmatrix} 71 & 86 & 70 & 64 \\ 83 & 71 & 82 & 75 \\ 76 & 88 & 74 & 85 \end{pmatrix}$$

の相関行列を求めよ。

話題 I

1. 行列と複素数

行列は実数の一般化と考えられる。これは，行列を用いれば一般の連立1 次方程式が $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ のように，表現上は単純な1 次方程式$ax=b$ の形になることからも理解されるだろう。行列の理論も，このような類推の下で展開される。

行列の効用はそれだけではない。例えば，複素数と 2 次の正方行列の間には演算に関して密接な関係がある。

複素数$z=a+bi$ に対して，

$$A(z)=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

とおいてみよう。$w=c+di$ とするとき，次のような関係式が得られる。

$$A(z+w)=A\big((a+c)+(b+d)i\big)=\begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}=A(z)+A(w),$$
$$A(zw)=A(ac-bd+(ad+bc)i)=\begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}=A(z)A(w),$$
$$A(z^{-1})=A\left(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i\right)=\begin{pmatrix} \dfrac{a}{a^2+b^2} & \dfrac{b}{a^2+b^2} \\ -\dfrac{b}{a^2+b^2} & \dfrac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}=A(z)^{-1}$$
$$A(\bar{z})\ =\ A(a-bi)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}=\ {}^{t}A(z).$$

行列を用いて複素数を表現する考え方は，さらに「四元数」とよばれる新しい数に対しても一般化されることが知られている。また，高度に進んだ物理学（量子物理）では，行列による表現理論は欠かせないものになっている。

2. 行列と検索エンジン

インターネットは，情報社会において重要な位置を占めている。中でも**検索エンジン**はインターネットの中心的なツールであり，検索窓と呼ばれるボックスに「検索キーワード」を入力すると，　キーワードを含むウェブページ（サイト）を「重要なものを上位にして」瞬時にリストアップする機能を持つ。この機能の背景には，進んだ行列の理論と，本文にも登場する点と線からなる図形である「グラフ」の理論がある。その基本的考え方を述べよう。

各ウェブページに，次の条件をみたすように点数をつける。

(1) すべてのページに渡る点数の和は 1 とする。

(2) 自分のページから他のページにリンクがあるとき，自分の点数をそれに等分配する。

(3) 自分のページの点数は, 他のページから等分配された総点数と一致する。

条件 (3) により，多くのページからリンクされているページの点数の値は大きくなり，さらに，点数が上位のページからリンクされているページの点数の値は大きくなることから，この点数付けは重要なウェブページを上位にするという要請を満たしている。

実際，このような点数付けが存在し，しかも一意的である。これを例で確かめよう。

まず，インターネットにおけるウェブページを点，1 つのウェブページA から他のウェブページB にリンクが張られていれば，A からB に向かう矢印で表わす。

計算を簡単にするため, ウェブページの数を4 とし, それらに番号①，②，③，④ を与える。そして，それぞれに配分される点数をx_1， x_2， x_3， x_4 としよう（図 1)。

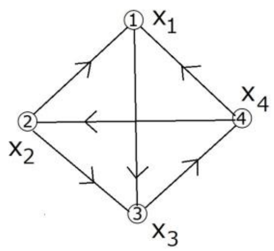


図1

条件 (1) から，

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

また，条件 (2) と(3) から，

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4, \quad x_2 = \frac{1}{2}x_4, \quad x_3 = x_1 + \frac{1}{2}x_2, \quad x_4 = x_3$$

行列を使って表せば,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

となる。注目すべきは，行列の各列の成分の和が 1 に等しいこと，および同じ列には 0 を除けば同じ数が並んでいることである。これは, 各ウェブページからの点数が等配分されることに対応している。

こうして得られる連立方程式を解けば,

$$x_1 = \frac{3}{13},\quad x_2 = \frac{2}{13},\quad x_3 = \frac{4}{13},\quad x_4 = \frac{4}{13}$$

となって，ウェブページ③と④が高得点となることがわかる。これは，一般にウェブページの数をn とするとき，すべての成分が0 以上，かつ各列の成分の和が1 であるようなn 次の正方行列P を用いることにより，問題は$P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ のベクトル解$\boldsymbol{x}$（ただし，成分はすべて0 以上）を求めることに帰着される。例えば図2 の場合，P は，

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

である。

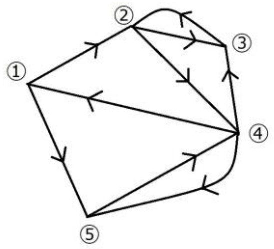


図2

一般の場合の解の存在と一意性については，行列の進んだ理論が必要となる。また，現実のウェブページの数は莫大ではあり，手計算で解を求めることは困難であるから，これを克服する手段も開発されている。

3. 行列と 1 次分数関数

逆行列を持つ 2 次の正方行列のみを以下に考える。$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$に対して，1 次分数関数$f_A(x)$を，

$$f_A(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

により定義する。A が単位行列のときは，明らかに$f_A(x) = x$ である。

別の行列$B = \begin{pmatrix} u & v \\ z & w \end{pmatrix}$が与えられたとき，合成関数$f_A(f_B(x))$を計算してみよう。

$$f_A\left(f_B(x)\right)=\frac{a\left(\frac{ux+v}{zx+w}\right)+b}{c\left(\frac{ux+v}{zx+w}\right)+d}=\frac{a(ux+v)+b(zx+w)}{c(ux+v)+d(zx+w)}$$
$$=\frac{(au+bz)x+av+bw}{(cu+dz)x+cv+dw}$$

ところで，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & v \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} au+bz & av+bw \\ cu+dz & cv+dw \end{pmatrix}$$

であることから，$f_A(f_B(x))=f_{AB}(x)$となる。すなわち，1 次分数関数の合成が，行列の積に対応するのである。

1 次分数関数は，ルネサンス期に絵画の世界で開発された「遠近法」に起源を持つ。そのアイディアを説明するため，平面上の2 直線$\ell 1$， $\ell 2$ と，その双方の上にはない点O を考える。そしてO を視点と見立てて，O からℓ_1 上の点P_1 を眺めたとき，ℓ_2 上に映る点P_2 を考える。数学的には，O を始点とし，P_1 を通る半直線とℓ_2 の交点をP_2 とするのである。

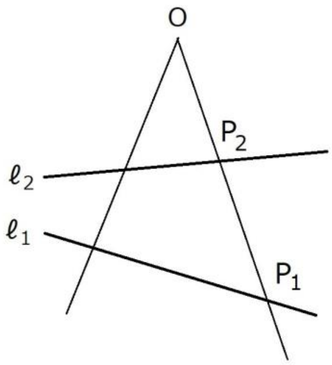


図3

O を原点とする座標系を取り，直線$\ell 1$， $\ell 2$ の媒介変数表示をそれぞれ，

$$\begin{cases} x=a_1t+b_1 \\ y=c_1t+d_1 \end{cases},\quad \begin{cases} x=a_2t+b_2 \\ y=c_2t+d_2 \end{cases}$$

とする。ただし$(a_i, c_i)\neq(0, 0)$ $(i=1, 2)$ とする。直線ℓ_i が原点を通るための必要十分条件は，連立方程式

$$\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たすtが存在することである。このことから，$a_id_i-b_ic_i\neq 0$ が，ℓ_i が原点を通らないための必要十分条件であることがわかる。

さて，P_1 $(a_1t_1+b_1, c_1t_1+d_1)$，P_2 $(a_2t_2+b_2, c_2t_2+d_2)$とするとき，

$$\begin{cases} a_1t+b_1=k(a_2t_2+b_2) \\ c_1t+d_1=k(c_2t_2+d_2) \end{cases},$$

を満たすkが存在するから，上の式を下の式で割ることによりkを消去すれば，

$$\frac{a_1t_1+b_1}{c_1t_1+d_1}=\frac{a_2t_2+b_2}{c_2t_2+d_2}$$

が得られる。そこで$A_1=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix}$， $A_2=\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{pmatrix}$とおけば， $f_{A_1}(t_1)=f_{A_2}(t_2)$であり，よって，$t_2=f_{A_2^{-1}A_2}(t_2)=f_{A_2^{-1}}\left(f_{A_2}(t_2)\right)=f_{A_2^{-1}}\left(f_{A_1}(t_1)\right)=f_{A_2^{-1}A_1}(t_1)$となるから，$t_1$，$t_2$の間の関係式 $t_2=f_{A_2^{-1}A_1}(t_1)$が得られる。

さて，ここで 1 次分数関数を用いた漸化式

$$x_1=x，x_{n+1}=\frac{ax_n+b}{cx_n+d}$$

により定義される数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$を考えよう。$x_n=f_{A^{n-1}}(x)$より与えられる（ただし，A^0は単位行列とする）。これを帰納法により確かめよう。$n=1$ のときは両辺ともにxであるから正しい。$n=k$のとき正しいと仮定すると，

$$x_{k+1}=f_A(x_k)=f_A(f_{A^{k-1}}(x))=f_{AA^{k-1}}(x)=f_{A^k}(x)$$

となるから，$n=k+1$ のときも正しい。よってすべての番号n に関して $x_n=f_{A^{n-1}}(x)$ が成り立つことが証明された。

第 3 章　発展

2.2 節では，問題を解決するために，行列のべき乗を求めた。その際，39 ページにあるように，行列の対角化を行った。例えば，問 2.5 では，$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 4\end{pmatrix}$に対して，$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$とすれば，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

と A が対角化され，これを利用して A^m を計算した。A を対角化するために，行列 P を用意したわけだが，この P がどのようにして用意されたものか，さらに，対角化後の行列と A との関係をここでは考えてみよう。先ずは，そういった計算の際に必要な行列の列ベクトルへの分割について学ぼう。

3.1　行列の列ベクトルへの分割

1.4.4 項や 1.5.2 項から，しばしばベクトルを並べて，行列を作る操作を行ってきた。これを逆に考えて，行列を列ベクトルの集まりに分割して捉えることを考えよう。m 行 n 列の行列 A に対して，第1列，第 2 列，⋯，第 n 列を順に，$\boldsymbol{a_1}$，$\boldsymbol{a_2}$，⋯，$\boldsymbol{a_n}$ と表そう。そうすると，行列 A は列ベクトルを並べて，

$$A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & \cdots & \boldsymbol{a_n}\end{pmatrix}$$

のように表される。これを A の**列ベクトルへの分割**という[7]。

例 3.1. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$のとき，$\boldsymbol{a_1}=\begin{pmatrix}1\\ 4\\ 7\end{pmatrix}$である。

問 3.1. 上の例の A に対して，$\boldsymbol{a_2}$と $\boldsymbol{a_3}$を答えよ。

すでに多少，1.5.2 項や 1.5.3 項でも登場した考え方であるが，行列の列ベクトルへの分割を用いて，行列の積を捉えなおすことを行おう。$m\times n$ 型行列 A に右から $n\times r$ 型行列 B をかけることを考える。$B=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_2} & \cdots & \boldsymbol{b_r}\end{pmatrix}$と列ベクトルに分割されているとする。$B$ の各列ベクトルは $n\times 1$ 型行列なので，$A\boldsymbol{b}_1$，$A\boldsymbol{b}_2$，⋯，$A\boldsymbol{b_r}$はすべて考えられる。

$$A\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{c_1},\quad A\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{c_2},\quad \cdots,\quad A\boldsymbol{b}_r=\boldsymbol{c_r}$$

とおく。r 個の列ベクトル $\boldsymbol{b_1}$，$\boldsymbol{b_2}$，⋯，$\boldsymbol{b_r}$に左からかけられているのはいずれも A なので，これを並べてまとめることができて，

$$A\begin{pmatrix}\boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_2} & \cdots & \boldsymbol{b_r}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{c_1} & \boldsymbol{c_2} & \cdots & \boldsymbol{c_r}\end{pmatrix}$$

となる。$B=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_2} & \cdots & \boldsymbol{b_r}\end{pmatrix}$だったから，

$$AB=\begin{pmatrix}A\boldsymbol{b_1} & A\boldsymbol{b_2} & \cdots & A\boldsymbol{b_r}\end{pmatrix}$$

となる。

問 3.2. $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}$のとき，直接計算することにより，

$$AB=\begin{pmatrix}A\boldsymbol{b_1} & A\boldsymbol{b_2}\end{pmatrix}$$

が成り立つことを確かめよ。

[7] 行ベクトルへの分割も考えられるが，ここでは考えない。

例題 3.1. $\begin{pmatrix}3 & -4\\-4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$，　$\begin{pmatrix}3 & -4\\-4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$が成り立つとき，2 次列ベクトル$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$を求めよ。

解答. ２つの方程式をまとめると，

$$\begin{pmatrix}3 & -4\\-4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & u\\y & v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & 2\end{pmatrix}$$

となる。$\begin{pmatrix}3 & -4\\-4 & 7\end{pmatrix}$は正則なので，両辺に$\begin{pmatrix}3 & -4\\-4 & 7\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}7 & 4\\4 & 3\end{pmatrix}$を左からかけると，

$$\begin{pmatrix}x & u\\y & v\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}7 & 4\\4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}26 & 1\\17 & 2\end{pmatrix}$$

となる。よって，

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{26}{5}\\\frac{17}{5}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

である。

問 3.3. 次の２つの方程式は左辺の係数が同じである。このことに着目して，行列を用いて解け。

(1) $\begin{cases}5x - 4y = 2\\-2x + 3y = -1\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}5u - 4v = 3\\-2u + 3v = -2\end{cases}$

3.2　行列の固有値

3.2.1　行列の固有値と固有ベクトル

問 2.5. で用いた行列$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\-2 & 4\end{pmatrix}$を再び考えよう。この A に例えば，右から$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$をかけると，$\begin{pmatrix}1 & 1\\-2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix}$となり，元の$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$とはかけ離れた列ベクトルになる。普通は，このように列ベクトルに行列をかける前と後とでは，無関係にみえる列ベクトルになるのだが，中には，元の列ベクトルと関連性の高い列ベクトルが得られる場合がある。実はそれが行列の対角化にも密接に関係しているのである。

P の列ベクトル$\boldsymbol{p_1}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p_2}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$を A に右からかけてみよう。そうすると，

$$A\boldsymbol{p_1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\-2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=2\boldsymbol{p_1}$$
$$A\boldsymbol{p_2}=\begin{pmatrix}1 & 1\\-2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=3\boldsymbol{p_2}$$

となり，列ベクトルに行列をかけた結果が元の列ベクトルのが定数倍になっている。このようなことが成り立つとき，$2\boldsymbol{p_1}$の 2，および $3\boldsymbol{p_2}$の 3 を行列 A の固有値，$\boldsymbol{p_1}$ を 2 に属する固有ベクトル，$\boldsymbol{p_2}$ を 3 に属する固有ベクトルという。一般には次のように定める。

> A を n 次正方行列とする。零ベクトルではないベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，$A\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}$ が成り立つとき，α を A の固有値，$\boldsymbol{x}$ を α に属する固有ベクトルという。

問 3.4. (1)　3 と-1 は$\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$の固有値で，$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$は 3 に属する固有ベクトル，$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$は$-1$ に属する固有ベクトルであることを示せ。

(2) 1，2，3 は，$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$の固有値で，$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$は 1 に属する固有ベクトル，$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$は 2 に属する

固有ベクトル，$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$は 3 に属する固有ベクトルであることを示せ。

3.2.2　固有値と固有ベクトルの計算

まず，正方行列 A に対して，その固有値 α について考えてみよう。$\boldsymbol{x}$ を α に属する固有ベクトルとすると，$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ で，

$$A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}$$

移項して，

$$A\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

E を単位行列とするとき，$\alpha\boldsymbol{x} = \alpha E\boldsymbol{x}$ が成り立つので，

$$A\boldsymbol{x} - \alpha E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$
$$(A - \alpha E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

ここで，$A - \alpha E$ が逆行列を持てば，両辺に左から$(A - \alpha E)^{-1}$をかけて $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる。しかし，$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ であるから，$A - \alpha E$ は逆行列を持たない。つまり，行列 A の固有値 α は，$A - \alpha E$ を正則行列にしないような値でなければならない。そして，このような α に対し，$\boldsymbol{x}$ がそれに属する固有ベクトルになる。これをもとに，次の２つの例題に取り組んでみよう。

例題 3.2. $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\-2 & 4\end{pmatrix}$とおく。$A$ の固有値とそれに属する固有ベクトルを 1 つずつ求めよ。

解答. α を A の固有値とすると，

$$A - \alpha E = \begin{pmatrix}1-\alpha & 1\\-2 & 4-\alpha\end{pmatrix}$$

は正則ではない。よって，この行列の行列式の値は 0 なので，

$$(1-\alpha)(4-\alpha) - 1\cdot(-2) = 0$$

この α の方程式を解くと，$\alpha = 2,\ 3$ である。続いて $\alpha = 2,\ 3$ のそれぞれの場合に，

$$\begin{pmatrix}1-\alpha & 1\\-2 & 4-\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots①$$

を解いて固有ベクトルを求める。

①に $\alpha = 2$ を代入すると，方程式は$\begin{pmatrix}-1 & 1\\-2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$となり，その解は 0 でない定数 t を用いて，$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\t\end{pmatrix}$となる。よって，2 に属する固有ベクトルを 1 つ求めると$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$となる。

①に $\alpha = 3$ を代入すると，方程式は$\begin{pmatrix}-2 & 1\\-2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$となり，その解は 0 でない定数 t を用いて，$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\2t\end{pmatrix}$となる。よって，3 に属する固有ベクトルを 1 つ求めると$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$となる。

注意. 上の例題の行列には固有値が 2 個あった。このように，行列の固有値を問われれば，すべての固有値を求めることになる。

問 3.5. 次の行列の固有値と各固有値に属する固有ベクトルを1つずつ求めよ。

(1) $\begin{pmatrix}2 & 3\\3 & 2\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}1 & 5\\2 & -2\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$

例題 3.3. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$とおく。$A$ の固有値とそれに属する固有ベクトルを 1 つずつ求めよ。

解答. α を A の固有値とすると，

$$A - \alpha E = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 3-\alpha \end{pmatrix}$$

は正則ではない。34 ページで学んだように，対角行列は対角成分に 0 を含むときが正則ではないので，$\alpha = 1,\ 2,\ 3$ である。続いて $\alpha = 1,\ 2,\ 3$ のそれぞれの場合に，

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 3-\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots ①$$

を解いて固有ベクトルを求める。

①に $\alpha = 1$ を代入すると，方程式は$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$となり，その解は 0 でない定数 t を用いて，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$となる。よって，1 に属する固有ベクトルを 1 つ求めると$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$となる。

①に $\alpha = 2$ を代入すると，方程式は$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$となり，その解は 0 でない定数 t を用いて，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$となる。よって，2 に属する固有ベクトルを 1 つ求めると$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$となる。

①に $\alpha = 3$ を代入すると，方程式は$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$となり，その解は 0 でない定数 t を用いて，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$となる。よって，3 に属する固有ベクトルを 1 つ求めると$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$となる。

問 3.6. 次の行列の固有値と各固有値に属する固有ベクトルを 1 つずつ求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$　(ただし，a は定数)

3.3　行列の対角化

行列の対角化には，固有値が密接に関係している。ここでは，2 次正方行列を対角化することを考えてみよう。なお，3 次以上の正方行列の対角化には，さらに進んだ数学が必要となる。

A を 2 次正方行列とし，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

と対角化できたとする。この両辺に P を左からかけると，

$$AP = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

となる。P の列ベクトル分割を行い，$P = (\boldsymbol{p_1} \quad \boldsymbol{p_2})$と表す。 P は正則なので$\boldsymbol{p_1}$，$\boldsymbol{p_2}$のいずれも $\mathbf{0}$ ではない。1.3.3 項と 3.1 項で学んだことを用いると，

$$AP = (A\boldsymbol{p_1} \quad A\boldsymbol{p_2}), \qquad P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = (\alpha\boldsymbol{p_1} \quad \beta\boldsymbol{p_2})$$

となるが，この２つが等しいので，

$$A\boldsymbol{p_1} = \alpha\boldsymbol{p_1}, \qquad A\boldsymbol{p_2} = \beta\boldsymbol{p_2}$$

となる。よって，α，β は行列 A の固有値であり，$\boldsymbol{p_1}$は α に属する固有ベクトル，$\boldsymbol{p_2}$は β に属する固有ベクトルである。したがって，行列 A が対角化できるなら，その結果の対角行列$P^{-1}AP$には固有値が並ぶ。そして P はそれぞれの固有値に属する固有ベクトルが固有値と対応する順に並んでできる正則行列である。

例題 3.4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$を対角化せよ。

解答. α を A の固有値とすると，

$$A - \alpha E = \begin{pmatrix} 3-\alpha & 2 \\ 1 & 4-\alpha \end{pmatrix}$$

は正則ではない。よって，この行列の行列式の値は 0 なので，

$$(3-\alpha)(4-\alpha) - 2 \cdot 1 = 0$$

この α の方程式を解くと，$\alpha = 2$，5 である。続いて $\alpha = 2$，5 のそれぞれの場合に，

$$\begin{pmatrix} 3-\alpha & 2 \\ 1 & 4-\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots①$$

を解いて固有ベクトルを求める。

　$\alpha = 2$ のときに，①に $\alpha = 2$ を代入すると，方程式は$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$となり，2 に属する固有ベクトルとして，例えば$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$をとることができる。

　同様に，5 に属する固有ベクトルとして，例えば$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$をとることができる。

　$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$とおくと，$P$ は正則であるので，A は対角化でき，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

となる。

注意. 行列 A を対角化するときには，$P^{-1}AP$の結果だけではなく，P も求める。P を変換行列という。そして，P は固有ベクトルを並べればいいので，その作り方は一通りではない。また，固有ベクトルの並べる順によって，対角化後の行列も変化する。例えば，上の例題で，$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$とすると，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$となる。

問 3.7. 次の行列を対角化せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

話し合ってみよう. 対角化後には対角成分に固有値が並ぶ。例題 3.4 では，計算で得られた２つの固有値を選んで対角化したが，これ以外の方法はないだろうか。

　つまり，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$や$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$となることはないのだろうか。話し合ってみよう。

話題 II

経済の仕組みを表現する行列

私たちが暮らす経済社会の仕組みを行列で表現し，経済の予測を行う産業連関分析は，1936 年旧ソビエト連邦のレオンチェフによって提案された。第二次大戦後，世界各国で経済政策の波及効果予測などに活用されるようになり，レオンチェフはその功績で 1973 年にノーベル経済学賞を授賞した。産業連関表は，国内や県内で 1 年間に行われた産業間の取引を行列で表したものである。日本では 5 年に一度日本全体の産業連関表が作成されており，各県も同様な行列を作成している。

簡単のために日本の産業が，一次産業（農林水産業）・二次産業（製造業・建設業など）・三次産業（商業・サービス業など）の 3 産業しかないとする。2015 年に日本で第一次産業からの生産品などの合計金額，総生産額は約 12.9 兆円と，推定されている。この金額の中で，一次産業自身に約 1.6 兆円，二次産業に約 8.2 兆円，三次産業に約 1.5 兆円，消費者に約 1.6 兆円が購入され利用されたと推定されている。この一次産業生産品の需要額 (単位 100 万円) を 1 行 4 列の行列（行ベクトル）で表現すると，

$$a_1 = (1566738 \quad 8211828 \quad 1531859 \quad 1577197)$$

となる。同様に二次産業生産品の需要は,

$$a_2 = (2991444 \quad 163806070 \quad 59446745 \quad 136786019)$$

三次産業生産品の需要は,

$$a_3 = (2187342 \quad 58496593 \quad 171341055 \quad 409875498)$$

と表現される。これらの行ベクトルを重ね合わせた次のような 3 行 4 列の行列 A を考えてみよう。

$$A = \begin{pmatrix} 1566738 & 8211828 & 1531859 & 1577197 \\ 2991444 & 163806070 & 59446745 & 136786019 \\ 2187342 & 58496593 & 171341055 & 409875498 \end{pmatrix}$$

今度は，この行列の 1 列目に注目すると，農業などの一次産業では，その生産品 12.9 兆円を生産するために，一次産業生産品約 1.6 兆円，二次産業生産品約 3.0 兆円，三次産業生産品約 2.2 兆円を購入していることがわかる。売った額約 12.9 兆円から使った額の合計約 6.8 兆円を引いた約 6.1 兆円が，一次産業が生成した経済的な価値となり，一次産業の総付加価値額と呼ばれる。この総付加価値額には，これらの産業に携わる方々の人件費（所得）や利益などが含まれる。二次産業，三次産業についても総付加価値を計算し，形式的に消費者の需要の付加価値は 0 と考えて，

$$a_4 = (6142098 \quad 132515787 \quad 409580829 \quad 0)$$

を A の第 4 行に追加した行列 B は，基本取引行列と呼ばれる。

$$B = \begin{pmatrix} 1566738 & 8211828 & 1531859 & 1577197 \\ 2991444 & 163806070 & 59446745 & 136786019 \\ 2187342 & 58496593 & 171341055 & 409875498 \\ 6142098 & 132515787 & 409580829 & 0 \end{pmatrix}$$

基本取引行列は，国の諸産業の関連性を数学的に表現している。基本取引行列 B の各行の和，各列の和を計算すると各産業の生産品総額になる。

行列 B の各列の要素を各列の和

$$(12887622 \quad 363030278 \quad 641900488)$$

で割ると，各産業がそのアウトプットを算出するために，どの程度各産業のアウトプットを原材料として利用しているかの比率となる。

この比率を行列表現したものが次の投入係数行列 C である。

$$C = \begin{pmatrix} 0.1216 & 0.02262 & 0.002386 \\ 0.2321 & 0.45122 & 0.092611 \\ 0.1697 & 0.16113 & 0.266928 \end{pmatrix}$$

C の第1 列は，一次産業の生産物を一定額生産するために，一次産業製品をその額の 12%，二次産業生産品をその 23%, 三次産業生産品をその 17%投入していることを意味する。また，C の第 1 行は, 一次産業の生産物を一定額生産するために, 一次産業製品をその額の 12%, 二次産業の生産物を一定額生産するために一次産業製品をその額の 2%，三次産業の生産物を一定額生産するために一次産業製品をその額の 0.2%必要とすることを意味する。

ここで，各産業の総供給量を 1 行 3 列の行列(列ベクトル)d

$$d = \begin{pmatrix} \text{一次産業総生産額} \\ \text{二次産業総生産額} \\ \text{三次産業総生産額} \end{pmatrix}$$

各産業の生産物の消費者による消費（最終消費）額を 1 行 3 列の行列 e

$$e = \begin{pmatrix} \text{一次産業生産品最終消費額} \\ \text{二次産業生産品最終消費額} \\ \text{三次産業生産品最終消費額} \end{pmatrix}$$

と表すと，Cd が，各産業が d だけ総生産を行うのに必要な各産業の生産額となる。この必要生産額に各産業生産品の最終消費額を加えれば，各産業の総生産額に一致するので，

$$Cd + e = d$$

が成立する。$d = Ed$ に注意すると（E は単位行列），

$$e = (E - C)d$$

となる。つまり，消費者の消費額 e は，各産業の総生産額 d に単位行列 E から取引係数行列 C を引いた行列の積で表される。逆に，消費額 d は，この逆行列を両辺にかければ，

$$(E - C)^{-1}e = d$$

と表される。産業連関表分析では，この $F = (E - C)^{-1}$ を逆行列表と呼んでいる。これまでの例で，逆行列を計算すると次のようになる。

$$F = \begin{pmatrix} 1.1537 & 0.05053 & 0.01014 \\ 0.5536 & 1.91666 & 0.24394 \\ 0.3888 & 0.43299 & 1.42009 \end{pmatrix}$$

消費が e から g だけ変化して，$e+g$ となったとすると，各産業の生産額は,

$$F(e + g) = Fe + Fg = d + Fg$$

となる。各産業の生産額の変化は，Fg ということがわかる。消費の拡大や落ち込みが，各産業の生産にどのように波及するかは，この逆行列を用いて評価できる。基本取引行列から，第三次産業（商業・サービス業など）の最終消費は，約 410 兆円であるが，これが 450 兆円に拡大，つまり 40 兆円拡大すると，

$$Fg = \begin{pmatrix} 1.1537 & 0.05053 & 0.01014 \\ 0.5536 & 1.91666 & 0.24394 \\ 0.3888 & 0.43299 & 1.42009 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 40000000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 405600 \\ 9757600 \\ 56803600 \end{pmatrix}$$

と計算することで，生産額が，第一次産業で 4056 億円，第二次産業で 9 兆 7575 億円，第三次産業で 56 兆 8036 億円増加することが期待される。逆行列を用いた消費の生産への波及効果の数学的意味は，行列の世界でも等比級数に関する公式,

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

が成立し，

$$(E - C)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} C^n$$

が成立しているとすると次のように解釈できる。ここで $C^0 = E$ と考える。

最終消費が g だけ変化すれば，それに応えるために，各産業は生産を $g = C^0 g$ 変化させなければならない。しかし，各産業の生産を g だけ変化させるためには，各産業は生産を Cg だけ変化させなければならない。さらに，生産を Cg だけ変化させるためには，$g = C^2 g$ 変化させなければならない。これを繰り返すと，行列の世界での等比級数のようなものが必要となるのである。実際に，この行列の無限級数が逆行列になるかを確かめてみると，

$$(E - C)\sum_{n=0}^{\infty} C^n = E - \lim_{n \to \infty} C^n$$

となる。つまり，$\lim_{n\to\infty} C^n \to O$が成立すれば，この式が成立することとなる。これは，C のすべての固有値が 1 より小さければ成立することとなる。この条件が通常の等比無限級数の公式の収束条件を行列の無限級数に拡張したものとなる。この例では，投入係数行列 C の固有値は，h_1= 0.5263， h_2= 0.2052， h_3= 0.1082，対応する固有ベクトルは，

$$l_1 = \begin{pmatrix} 0.04983 \\ 0.83339 \\ 0.55043 \end{pmatrix},\quad l_2 = \begin{pmatrix} -0.05549 \\ -0.30551 \\ 0.95057 \end{pmatrix},\quad l_3 = \begin{pmatrix} -0.99050 \\ 0.09707 \\ 0.09744 \end{pmatrix}$$

となり，収束条件を満たしている。日本では，総務省統計局や各県が統計調査を通じて産業連関表を作成しているが，実際に経済分析で利用される投入係数表は，産業をどれくらい細かく分類するかで異なっており，統計局の場合は，投入係数表と呼ばれる 4 種類の投入係数行列（13 部門分類， 37 部門分類， 107 部門分類， 187 部門分類），3 種類の逆行列係数表（37 部門分類， 107 部門分類， 187 部門分類）を公表している。187 部門分類では，当然 187 行 187 列の行列の計算が前提となる。

第 1 章　解答例

問 1.1.　第 1 行：(65 82 78 70)

第 4 列：$\begin{pmatrix} 70 \\ 65 \\ 85 \end{pmatrix}$

問 1.2.　(1)　例えば　$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2)　例えば　$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$

問 1.3.　(1)　例えば　$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2)　例えば　$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}$

問 1.4.　(1)　例えば　$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2)　例えば　$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ b \\ a \end{pmatrix}$

問 1.5.　正方行列：$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

行ベクトル：(1 2 3)

列ベクトル：$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

問 1.6.　(1)　3×5 型

(2)　5

(3)　$(10\ \ -3\ \ 9\ \ 1\ \ 0)$

(4)　$\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$

問 1.7. (1) $a=-3, b=4, c=1, d=3$

(2) $a=b=1, c=0, x=2, y=z=-2$

問 1.8. (1) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{6} \\ -1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2a & b+p & c+x \\ b+p & 2q & r+y \\ c+x & r+y & 2z \end{pmatrix}$

問 1.9. (1) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & b-p & c-x \\ p-b & 0 & r-y \\ x-c & y-r & 0 \end{pmatrix}$

問 1.10. 2

問 1.11. $1A = 1\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot a & 1\cdot b \\ 1\cdot c & 1\cdot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$

また,

$kO = k\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cdot 0 & k\cdot 0 \\ k\cdot 0 & k\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$

問 1.12. (1) $\begin{pmatrix} 28 & -21 & 0 \\ -14 & 56 & -7 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

問 1.13. $a=9, b=0, c=3, d=-1$

問 1.14. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

問 1.15. (1) -17

(2) 0

問 1.16. $\dfrac{1}{2}n(n+1)$

問 1.17. (1) $\begin{pmatrix} 13 \\ -4 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $ax + by + cz$

(5) $\begin{pmatrix} a & 2b & 3c \\ 4a & 5b & 6c \\ 7a & 8b & 9c \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} ax & ay \\ bx & by \\ cx & cy \end{pmatrix}$

問 1.18. 積が計算できるのは, $AA, BA, AC.BC, CB$ で,

$AA = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 8 & 11 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}$

$AC = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

$BC = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -6 \\ 5 & -12 & -10 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

$CB = \begin{pmatrix} -12 & 15 \\ -1 & 15 \end{pmatrix}$

問 1.19. 対角行列であるのは, (1),(2),(5)

問 1.20. (1) 5,7

(2) a, d

(3) $0, 4, 8$

問 1.21. (1) $\begin{pmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 12 & 6 \\ -20 & 10 & 0 \\ -5 & 9 & -1 \end{pmatrix}$

問 1.22. 単位変換の計算式は $\begin{pmatrix} 5.7 & 1.0 & 37 \\ 3.6 & 1.1 & 22 \\ 9.3 & 1.8 & 57 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.54 & 0 & 0 \\ 0 & 454 & 0 \\ 0 & 0 & 108 \end{pmatrix}$ であり, その計算結果は

$\begin{pmatrix} 14.478 & 454.0 & 3996 \\ 9.144 & 499.4 & 2376 \\ 23.622 & 817.2 & 6156 \end{pmatrix}$ である。ここで, 単位は第 1 列センチメートル, 第 2 列がグラム, 第 3 列が円である。

問 1.23. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

問 1.24. ${}^t(kA) = {}^t\begin{pmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kd \\ kb & ke \\ kc & kf \end{pmatrix}$ であり,

$k{}^tA = k\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kd \\ kb & ke \\ kc & kf \end{pmatrix}$ なので, 等式が成り立つ。

問 1.25. A を m 行 n 列の行列とすると, ${}^tA$ は n 行 m 列の行列となる。$A + {}^tA$ が計算できるなら, A と ${}^tA$ の型が等しくなければならないので, $m = n$, すなわち, A は正方行列でなければならない。逆に, 正方行列の転置行列は型が元の行列と等しいので, $A + {}^tA$ が計算できる。

問 1.26. 例えば, $(1, 2)$ 成分と $(2, 1)$ 成分は, いずれも A,B 2 地点間の道の本数を表している。2 地点間を結ぶ道の本数はそれら 2 地点に対して定まるので, $(1, 2)$ 成分と $(2, 1)$ 成分は等しい。他も同様にして, (i, j) 成分と (j, i) 成分が等しくなる。よって, 対称行列である。

問 1.27. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

問 1.28. $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

問 1.29. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

問 1.30. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

問 1.31. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

問 1.32. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

問 1.33. 第 1 行と第 3 行の交換

問 1.34. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

問 1.35. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 1 \end{pmatrix}$

問 1.36. (1) Y さんと Z さんの教科ごとの点数の合計

(2) Z さんが X さんより, どれだけ点数が高いかを教科ごとに計算したもの

問 1.37. (1) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(4) 1

問 1.38. (1) $\begin{pmatrix} 3 & 27 & 6 \\ 9 & 15 & -15 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} a^4 & 0 & 0 \\ 0 & b^4 & 0 \\ 0 & 0 & c^4 \end{pmatrix}$

(5) O

問 1.39.

2 次対角行列を $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ とおく。自然数 m に対して, $A^m = \begin{pmatrix} a^m & 0 \\ 0 & b^m \end{pmatrix}$ を示す。

$m = 1$ のとき, $A^1 = A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 & 0 \\ 0 & b^1 \end{pmatrix}$ で成立する。

$m = k$ のとき, 成立すると仮定すると, $m = k + 1$ のときは, $A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & 0 \\ 0 & b^{k+1} \end{pmatrix}$ より, 成立する。したがって, 数学的帰納法により, すべての自然数 m で成立する。

問 1.40. (1) $\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ \frac{a}{b} & 1 & \frac{c}{b} \\ \frac{a}{c} & \frac{b}{c} & 1 \end{pmatrix}$

問 1.41.

$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ より, ${}^t A\boldsymbol{x} = (ax+by \quad cx+dy)$ である。一方, ${}^t\boldsymbol{x}{}^tA = (x \quad y)\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = (ax+by \quad cx+dy)$ であるので, ${}^tA\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}{}^tA$ である。

問 1.42. $\mathbf{1}_3{}^t\mathbf{1}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

${}^t\mathbf{1}_3\mathbf{1}_3 = 3$

問 1.43. $\boldsymbol{x}{}^t\boldsymbol{x}$ は (i,j) 成分が ij である n 次正方行列。すなわち,

$$\boldsymbol{x}{}^t\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 2n \\ 3 & 6 & 9 & \cdots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 2n & 3n & \cdots & n^2 \end{pmatrix}$$

${}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x} = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

問 1.44. $\dfrac{\pi}{3}$

問 1.45. A と C は交換可能。B と D は交換可能。E は他のすべての行列と交換可能。

問 1.46. $(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ であり, 確かに $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$ である。等号が成り立たない理由としては, $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$ において, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ で A, B が交換可能でないため, $-AB + BA = O$ が成り立たないことによる。

問 1.47. $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと, $AX = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix}$ となる。したがって, $AX = O$ となるための必要十分条件は, $a+2c = b+2d = 0$ が成立することである。このような a,b,c,d は実数 s,t を用いて, $a = 2s, c = -s$ そして $b = 2t, d = -t$ と表される。よって, $X = \begin{pmatrix} 2s & 2t \\ -s & -t \end{pmatrix}$ と表される。

問 1.48.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を計算すると, いずれも単位行列になるので, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。

(2) $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ に対して, $BX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $\begin{pmatrix} x+z & y+w \\ x+z & y+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が成り立つ。よって, $x+z = 1, \quad x+z = 0$ となる

が, この式はどのような数 x, z に対しても成立しない。よって, $BX = E$ を満たす行列 X は存在しない。

問 1.49. A に零行列ではない $C = (2 \ \ -1)$ を左からかけると, $CA = (2 \ \ -1)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = (0 \ \ 0) = \mathbf{0}$ となる。もし, A が正則であるとすれば, A^{-1} を $CA = \mathbf{0}$ の両辺に右からかけることで, $C = \mathbf{0}$ となり, $C = (2 \ \ -1) \neq \mathbf{0}$ に矛盾する。よって, A は正則ではない。

問 1.50. A に右から, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ をかけると, 結果は $\mathbf{0}$ となる。よって, A は正則ではない。

問 1.51. E と E' がどのような行列 A に対しても, $AE = EA = A$, $AE' = E'A = A$ を満たすとする。そうすると, $E = EE' = E'$ となり, $E = E'$ である。

問 1.52.

(1) 正則で, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$

(2) 正則ではない

(3) 正則で, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -20 \\ -10 & 30 \end{pmatrix}$

(4) 正則で, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{11} & \frac{6}{11} \\ \frac{12}{11} & -\frac{2}{11} \end{pmatrix}$

(5) 正則で, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$

(6) $a = \pm 1$ のときは正則ではない。$a \neq \pm 1$ のときは, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-a^2} & -\frac{a}{1-a^2} \\ -\frac{a}{1-a^2} & \frac{1}{1-a^2} \end{pmatrix}$

問 1.53. 正則であるものは, (1)(2) である。

(1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

(2) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$.

問 1.54. (1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

第２章　解答例

問 2.1.　(1)　$\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

(2)　$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$

問 2.2.　(1)　$x = 6, y = 5$

(2)　$x = 4, y = -3$

問 2.3.　(1)　行列で表すと, $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である。このとき, 係数行列 $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ は行列式が $(-1)\cdot(-6) - 3\cdot 2 = 0$ なので, 正則ではない。この方程式は第 1 式を 2 倍して第 2 式に加えると $0 = 0$ になり, $-x + 3y = 0$ だけが残る。よって解は $x = 3t, \quad y = t$　（t は実数）

(2)　行列で表すと, $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である。このとき, 係数行列 $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$ は行列式が $2\cdot(-5) - 2\cdot(-5) = 0$ なので, 正則ではない。第 1 式を $\frac{5}{2}$ 倍して第 2 式に加えると $0 = 0$ になり, $2x + 2y = 0$ だけが残る。この式の両辺を 2 で割ると $x + y = 0$ なので, 解は $x = t, \quad y = -t$　（t は実数）

(3)　行列で表すと, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ である。このとき, 係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ は行列式が $1\cdot 3 - (-1)(-3) = 0$ なので, 正則ではない。この方程式は第 1 式を 3 倍して第 2 式に加えると $0 = 0$ になり, $x - y = 1$ だけが残る。よって解は $x = t + 1, \quad y = t$　（t は実数）

(4)　行列で表すと, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ である。このとき, 係数行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ は行列式が $2\cdot 2 - 1\cdot 4 = 0$ なので, 正則ではない。この方程式は第 1 式を 2 倍から第 2 式をひくと $2 = 0$ になり, この方程式を同時に満たす x, y は存在しない。

問 2.4.　(1)　$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.55 \end{pmatrix}$

(2)　$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 + 4\cdot 0.55^m & 5 - 5\cdot 0.55^m \\ 4 - 4\cdot 0.55^m & 4 + 5\cdot 0.55^m \end{pmatrix}$

(3)　$250 + 150\cdot 0.55^m$（人）

問 2.5.　(1)　$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(2)　$\begin{pmatrix} 2^{m+1} - 3^m & -2^m + 3^m \\ 2^{m+1} - 2\cdot 3^m & -2^m + 2\cdot 3^m \end{pmatrix}$

(3)　$a_n = 2^n - 3^{n-1}$, $b_n = 2^n - 2\cdot 3^{n-1}$

問 2.6.　(1)　$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$,

$$A^m = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -(-3)^{m+1}+2^{m+1} & 2\cdot(-3)^{m+1}+3\cdot 2^{m+1} \\ -(-3)^m+2^m & 2\cdot(-3)^m+3\cdot 2^m \end{pmatrix}$$

(2) $a_n = \dfrac{1}{5}[\{2\cdot(-3)^{n-1}+3\cdot 2^{n-1}\}\alpha + \{-(-3)^{n-1}+2^{n-1}\}\beta]$

問 2.7. (1) 30

(2) 38

問 2.8. この行列を隣接行列に持つグラフはこの問の中に書かれた図になる。このグラフでは, どの点を出発点に選び, どの道を選んでも, 道を 3 本通るまでに必ず D にたどり着く。そして, D からはどの点にも行けない。すなわち, どの点を出発点に選び, どの道を選んでも, 4 本の道を通って行けるところがない。すなわち, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^4 = O$ である。

問 2.9. $(\bar{k}, \bar{m}, \bar{e}, \bar{r}) = \dfrac{1}{3}{}^t\mathbf{1}_3 \begin{pmatrix} 71 & 86 & 70 & 64 \\ 83 & 71 & 82 & 75 \\ 76 & 88 & 74 & 85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{230}{3} & \frac{245}{3} & \frac{226}{3} & \frac{224}{3} \end{pmatrix}$

問 2.10. $Q_3 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ なので,

$$Q_3B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 71 & 86 & 70 & 64 \\ 83 & 71 & 82 & 75 \\ 76 & 88 & 74 & 85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{17}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{16}{3} & -\frac{32}{3} \\ \frac{19}{3} & -\frac{32}{3} & \frac{20}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{19}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{31}{3} \end{pmatrix}$$

問 2.11. $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ なので, 確かに対称行列である。$Q_2^2 = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = Q_2$

問 2.12. Q_2, Q_3 の形は, 上 2 つの解答中にあるものを用いる。

${}^t\mathbf{1}_2Q_2 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, Q_2 のすべての行ベクトルの和は 0 である。

$Q_2\mathbf{1}_2 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より, Q_2 のすべての列ベクトルの和は 0 である。

${}^t\mathbf{1}_3Q_3 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, Q_3 のすべての行ベクトルの和は 0 である。

$Q_3\mathbf{1}_3 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より, Q_3 のすべての列ベクトルの和は 0 である。

問 2.13. $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 218 & -289 & 220 & 167 \\ -289 & 518 & -308 & 47 \\ 220 & -308 & 224 & 136 \\ 167 & 47 & 136 & 662 \end{pmatrix}$

問 2.14. 小数第２位まで求めると次のようになる。$\begin{pmatrix} 1 & -0.86 & 1. & 0.44 \\ -0.86 & 1 & -0.9 & 0.08 \\ 1. & -0.9 & 1 & 0.35 \\ 0.44 & 0.08 & 0.35 & 1 \end{pmatrix}$

第３章　解答例

問 3.1. $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

問 3.2. $AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}$ であり一方, $A\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz \\ cx+dz \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay+bw \\ cy+dw \end{pmatrix}$ であるので, $\begin{pmatrix} A\boldsymbol{b}_1 & A\boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}$ となる。よって, $AB = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{b}_1 & A\boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix}$ である。

問 3.3. (1),(2) の方程式を行列を用いて表すと, $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ となる。2 つの方程式をまとめると, $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ となる。$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ は正則なので, 両辺に $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ を左からかけると, $\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ となる。よって, $x = \frac{2}{7}, y = -\frac{1}{7}, u = \frac{1}{7}, v = -\frac{4}{7}$ である。

問 3.4. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ より, 3 は $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値で, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 3 に属する固有ベクトルである。

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ より, -1 は $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値で, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は-1 に属する固有ベクトルである。

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より, 1 は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値で, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は 1 に属する固有ベクトルである。

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ より, 2 は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値で, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は 2 に属する固有ベクトルである。

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ より, 3 は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値で, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ は 3 に属する固有ベクトルである。

問 3.5. 以下, s, t に 0 でない任意の実数を代入すればよい。

(1) 固有値は 5 と -1 で, 5 に属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix}$,

-1 に属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$

(2)　固有値は -4 と 3 で, -4 に属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} s \\ -s \end{pmatrix}$,
3 に属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 5t \\ 2t \end{pmatrix}$

(3)　固有値は 1 で, 1 に属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$

問 3.6.　以下, s, t, u に 0 でない任意の実数を代入すればよい。

(1)　固有値は 3 と -1 で, 3 に属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$,
-1 に属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$

(2)　固有値は $a, a+1, a+2$ で, a に属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
$a+1$ に属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$, $a+2$ に属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}$

問 3.7.　問題に与えられた行列を A とおく。

(1)　$P = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ として, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(2)　$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$ として, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(3)　$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ として, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(4)　$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ として, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

本教材の作成に当たっては，以下の有識者のご協力をいただきました。

阿部　恒幸　　東北学院中学校・高等学校　校長

牛瀧　文宏　　京都産業大学　教授

川﨑　宣昭　　筑波大学附属高等学校　教諭

熊倉　啓之　　静岡大学　教授

砂田　利一　　明治大学　研究・知財戦略機構　研究特別教授

椿　　広計　　大学共同利用機関法人 情報・システム研究機構
統計数理研究所　所長

（50 音順　敬称略）

文部科学省においては，次の者が本書の作成・編集に当たりました。

滝波　泰　　　初等中等教育局教育課程課長

長尾　篤志　　初等中等教育局主任視学官

名子　学　　　初等中等教育局教育課程課課長補佐

橋本　郁也　　初等中等教育局教育課程課専門官（令和２年３月当時）

助川　央　　　初等中等教育局教育課程課専門職

（橋本氏を除き、職名は令和２年８月現在）

本教材の作成に当たっては，以下の有識者のご協力をいただきました。

阿部　恒幸　　東北学院中学校・高等学校　校長

牛瀧　文宏　　京都産業大学　教授

川﨑　宣昭　　筑波大学附属高等学校　教諭

熊倉　啓之　　静岡大学　教授

砂田　利一　　明治大学　研究・知財戦略機構　研究特別教授

椿　　広計　　大学共同利用機関法人 情報・システム研究機構
統計数理研究所　所長

（50 音順　敬称略）

文部科学省においては，次の者が本書の作成・編集に当たりました。

滝波　泰　　　初等中等教育局教育課程課長

長尾　篤志　　初等中等教育局主任視学官

名子　学　　　初等中等教育局教育課程課課長補佐

橋本　郁也　　初等中等教育局教育課程課専門官（令和２年３月当時）

助川　央　　　初等中等教育局教育課程課専門職

（橋本氏を除き、職名は令和２年８月現在）