

事例 10 2年 図形と合同「円周角の定理」

(1) JSL 生徒に対してこの課題を実施するねらい

円周角の定理を通して、三角形について学習した図形分野に関する数学的命題の真偽を演繹的に推論し、それを表現して相手に伝えることを学ぶ。したがって、数学的に考察する力と、それを日本語で表現する力の双方が必要である。最初は数学的な書き方にこだわる必要はなく、説明文を作文するような感覚で書いても構わないとしたい。「したがって・だから・よって・ゆえに・なぜならば」といった接続詞の使用について知ると共に、三角形、円といった基本的な平面図形について小学校レベルの内容について確認しながら授業を進めることも必要である。

(2) 既習事項の確認

角	辺
多角形, 内角, 外角	三角形, 三角形の内角, 三角形の内角の和
半径, 直径, 中心, 円周, 弧, 弦, おうぎ形, 中心角	二等辺三角形, 正三角形, 直角三角形 (定義, 性質, 条件)

★ 日本で学習するような図形分野は、海外では珍しく、また時期的に海外の方が遅い。さらに、論証活動は、ほとんどの場合海外では学ぶ機会がない。よって、むしろ図形の基礎と論証に関する基礎の学習を、取り出し指導などで十分学んでからのほうが、スムーズに生徒に受け入れられるであろう。

(3) 留意したい語彙・表現・言い回し

数学科の表現

内角, 円周, 円周上, 定理…などの用語を知っているのに使い切れない。

数学の概念的な用語の表している意味が、正確には理解できていない。

- ・ 言い換えをする (または, させてみる)。
例) 内角 = 「内側の角」, 円周 = 「円のまわり」
- ・ 言い換えだけでは問題が解決できないこともあることを示す。
例) 外角 = 外側の角 ×
- ・ 子どもの状況に合わせて, 問題を解きながら, 概念の数学的な意味とことばの意味との関係を理解させる。

(4) 数学的な考え方と学習活動の流れ

円周角の定理		〈2年〉【図形と合同】						
課 題	円周上の角が中心角の半分の大きさであることを証明しよう。							
数学的な 考え方	1	2	3	4	5	6	7	8
		○	○		○			

目 標	1つの弧に対する円周角は中心角の半分の大きさであることを実験から帰納的に導き、それがいつでもいえることを証明する。
-----	---

■ 活動の流れ

数学的な考え方	学習活動
2 帰納的に推論する	① 円を6等分して3つの頂点を結んだ様々な三角形を切り出し、同じ半径の円に重ねたとき、共通に見られるルールや性質について、複数の辺の長さに着目して見いだそうとする。
2 帰納的に推論する	↓ ② いくつかの具体的な操作による思考から共通に成立していると思われる円周上の角の大きさに関する性質やルールを見いだす。
5 一般化する	↓ ③ 円周上の角に関する具体的な事例による帰納的な考察から、それらを含むより大きな集合について考察し成り立っているであろうと考えられることを推測する。
3 演繹的に推論する	↓ ④ 既習の数学的知識をもとにして、厳密に、円周角の定理が、3パターンの中の1番目について、成り立っていることを見いだす。
3 演繹的に推論する	↓ ⑤ 既習の数学的知識をもとにして、厳密に、円周角の定理が、3パターンの中の2番目について、成り立っていることを見いだす。
3 演繹的に推論する	↓ ⑥ 既習の数学的知識をもとにして、厳密に、円周角の定理が、3パターンの中の3番目について、成り立っていることを見いだす。

■ 準備するもの

半径2cmの円を6つ印刷したB4白紙(教師), コンパス, はさみ, 物差し

■ 学習活動と具体的な支援の例

	学習活動	支援 ▲JSL支援事項△留意事項
導入	<p>(導入課題とその解決)</p> <p>■半径2 cmの円を6～8つ描いてある紙を配布する。</p> <p>■すべての円について、円周を6等分する。</p> <p>※実態に応じて、生徒が円を描いてもよい。</p> <p>※8等分の方がより興味深い学習が可能であるが、角の二等分線の作図等確認すべき既習事項は増える。</p> <p>※6等分する方法について復習する必要があるか否かは、教室と生徒の実態に応じて決定してよい。正六角形についてどこかで扱われているなら、容易に等分できるであろう。1年次で平面図形の対称性について学ぶ際に扱っておくと効果的である。</p>	<p>▲語彙：円，半径，等分</p> <p>△実態に応じて、生徒が円を描いてもよい。</p> <p>△8等分の方がより興味深い学習が可能であるが、角の二等分線の作図等確認すべき既習事項が増えるので、注意が必要。</p> <p>△6等分する方法について復習する必要があるか否かは、教室と生徒の実態に応じて決定してよい。正六角形についてどこかで扱われているなら、容易に等分できるであろう。1年次で平面図形の対称性について学ぶ際に扱っておくと効果的である。</p>
展開 1	<p>■各円周上の任意の3点を結び、いろいろな三角形を作る。</p> <p>※どの3点でもよい。円に内接する三角形ができる。</p> <p>教師の発問で、形の違う三角形を作るように指示する。</p> <p>■作った三角形を切り出す。</p> <p>■「何種類の三角形ができたか」</p> <p>※直角三角形，正三角形，頂点が鈍角の二等辺三角形の3種類の三角形ができる。</p> <p>■「内角は，どのような値か。」</p> <p>※切り出した三角形から，30°，60°，90°，120°の4通りの内角が得られる(4通りの内角しか得られない)。</p> <p>※角の大きさは，生徒を指名し，生徒の発言によって明らかにしていく。その際，理由も問う。教師が明らかにしない。</p> <p>※切り出した三角形紙片に角の値を記入するように指示すると，非常にわかりやすくなる。</p>	<p>▲内角，外角の説明が必要な場合，説明することだけでなく，図解が必要な場合がある。</p> <p>▲言い換え：「値か」⇔「どれくらいの角度と思うか」</p> <p>△角の大きさは，生徒を指名し，生徒の発言によって明らかにしていく。その際，理由も問う。教師が明らかにしない。</p> <p>▲切り出した三角形紙片に角の値を記入するように指示しながら，「内角」ということばを使うと，理解が進む。</p>

①円を6等分して3つの頂点を結んだ様々な三角形を切り出し、同じ半径の円に重ねたとき、共通に見られるルールや性質について、複数の辺の長さに着目して見いだそうとする。

②いくつかの具体的な操作による思考から共通に成立していると思われる円周上の角の大きさに関する性質やルールを見いだす。

③円周上の角に関する具体的な事例による帰納的な考察から、それらを含むより大きな集合について考察し、成り立っているであろうと考えられることを推測する。

■半径2cmの円が1つ印刷してある白紙を配布する。

■切り出した複数の三角形を同じ長さの辺で重ね、これを半径2cmの円周上に置く。

※各頂点が円周上にピッタリと収まることに気がつく。

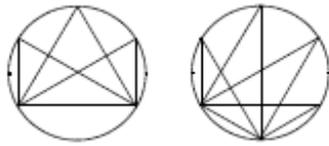


図1

図2

なお、円周角の定理と3平方の定理により、辺の長さはすべて求めることが可能である。

■気がついたことをまとめる。

※上の図の2通りの試みから、気がついたことを挙げていく。時間を与えて考え、生徒が発表する。

※生徒の側から出なければ、教師が板書等で、同じ弧に対する円周上の角が等しいことを示す。

■その大きさを知る。

※図1、図2共に紙刃には角の大きさが記してあるので、中心角と比較することは簡単である。どの円周上の角も中心角の半分の大きさであることを、具体的な角の大きさから知る。

■「円周角の定理」の定式化

※同じ弧に対する円周上の角が等しいことを見いだした後で「円周角」の用語とその意味を学び、更に円周角の定理としてまとめる。

▲「円周」、「円周上に置く」ということばを左の作業をしながら、繰り返し示すことが大切である。

△いろいろな違う長さの辺で同様のことを試行するよう指示する。切り出した三角形に現れる辺の長さは、全部で3通りのみである。教室や生徒の実態に応じて、そのあたりの理由を問うてみるのも、良い学習である。円周を等分する円周上の6点から任意の2点を選ぶ選び方は、3通りしかないからである。下図の2通りを試みることができる。

△「三角形に現われる辺の長さが全部で3通りのみである」ことの理由を生徒に聞いても、わからない場合、その原因がどこにあるかを考える必要があるだろう。たとえば「三角形に現われる」という表現が理解できない場合は、数学が理解できないこととは異なるであろう。

▲「内角」と「円周角」の違い、「円周角」と「中心角」の違いにも留意する。これも、図を示しながら、あるいは部分を切り出しながら説明する。

▲「気がついたこと」を問う場合、生徒によってはヒントが必要な場合があるだろう。生徒の実態にあわせ、理解しやすいことばや言い換えて問う工夫が必要である。

▲「同じの弧」の説明では、「同じ」「弧」を図のうえで指し示しながら、説明したい。

▲「円周角は、いつも中心角の半分だね。だから、円周角の大きさはいつも中心角の半分の角度だね」

④既習の数学的知識をもとにして、厳密に、円周角の定理が、3パターンのうちの1番目について、成り立っていることを見いだす。

■円周角の定理が成り立っていることを、段階的に証明する<その1>
※ここまでする操作活動中心の授業であるから、生徒と教室の実態によっては1時間の授業でこの段階まで進めない場合もある。

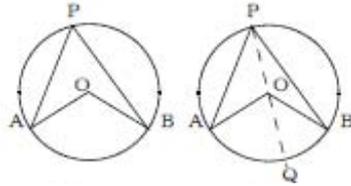


図3 図4

※図4のように補助線を引く。

△OAPにおいて、
 $OA=OP$
 $\therefore \angle OAP=\angle OPA$
 $\therefore \angle AOQ=\angle OAP+\angle OPA$
 $=2\angle OPA\cdots\cdots\cdots\textcircled{1}$

同様に
 $\angle BOQ=\angle OBP+\angle OPB$
 $=2\angle OPB\cdots\cdots\cdots\textcircled{2}$

①+②より、
 $\angle AOB=2\angle APB$

すなわち
 $\angle APB=1/2\angle AOB$

⑤既習の数学的知識をもとにして、厳密に、円周角の定理が、3パターンのうちの2番目について、成り立っていることを見いだす。

■円周角の定理が成り立っていることを、段階的に証明する<その2>

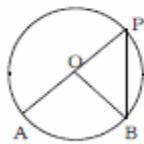


図5

△OBPにおいて、
 $OB=OP$
 $\therefore \angle OBP=\angle OPB$
 $\therefore \angle AOB=\angle OBP+\angle OPB$
 $=2\angle OPB$

すなわち
 $\angle APB=1/2\angle AOB$

▲ 以下、証明が理解できないときは、まず具体的な角度で証明方法を理解したあと、文字を使う。

△まず、図3、4のような場合から考える。この状態で円周角が中心角の半分であることを示すことができればよい。

▲説明を言い換えても理解できないときは具体的な角度で説明する。

△図5の場合、補助線は不要であることを確認する。

⑥既習の数学的知識をもとにして、厳密に、円周角の定理が、3パターンの中の3番目について、成り立っていることを見いだす。

■円周角の定理が成り立っていることを、段階的に証明する<その2>

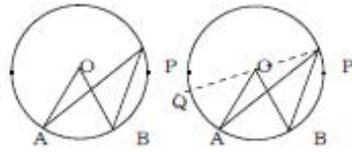


図6 図7

※図7のように補助線を引く。

前の証明により、

$$\angle QPB = 1/2 \angle QOB \dots\dots\dots ①$$

$$\angle QPA = 1/2 \angle QOA \dots\dots\dots ②$$

②-① より

$$\angle APB = 1/2 \angle AOB$$

△ 「A=B, C=D ならば
A- C=B- D」
であることを確認する。

まとめ

▲「円周角は、いつも中心角の半分だね。だから、円周角の大きさはいつも中心角の半分の角度だね」