事例９　２年 図形の性質「三角形の合同の証明」

（１）JSL 生徒に対してこの課題を実施するねらい

三角形の合同条件を用いて演繹的に考察し，簡単な場合について三角形の合同を証明することが，この授業のねらいである。そのためには，辺や角，三角形，三角形の内角，三角形の内角の和といった平面図形や三角形についての基礎的事項を理解している必要がある。そこで，生徒によっては，そういった基礎事項を再確認する場面と考えることも可能である。また，相手に説明するためには，数学的な説明の文章をかく必要がある。そのために必要な言い回しや表現などを確認する必要もある。

（２）既習事項の確認

	角		辺
	対応する角・辺（合同における）		三角形とは
	三角形の和が 180°であること		三角形の内角
	対頂角とその性質		平行
	錯角，平行線の錯角		同位角，平行線の同位角
	「それぞれ」の意味		平行になるための条件

★三角形の合同条件を再確認しておくこと。
★特に論証に関する学習は，海外では中学校段階で扱うケースはほとんどない。読み手に論証した内容を伝えることが出来るような表現について，確認しておきたい。
★証明の書き方は，徐々に形式に揃えられればよく，最初は説明文を作文するような感覚で書いても構わないとしたい。また，論理的表現（例：「つまり」「または」「したがって」）が多く登場するため，これらの表現も合わせて指導するとよい。

（３） 留意したい語彙・表現・言い回し

数学科の表現

（証明の問題例）
下の図で，２つの線分ＡＢとＣＤは長さが等しくて平行である。点Ｏは線分ＡＤとＢＣとの交点である。このとき，△ＯＡＢと△ＯＣＤが合同であることを証明しなさい。

↓

・一文が長く，条件が複数入ることが多い。
　→分かち書きで整理する。
・「用語 or 記号＋アルファベット」（例：点Ｏ，線分ＡＢ）でひとまとまりの意味が表されていることに慣れる。
・文章の流れが，「仮定」→「結論」になっていることに注目させる。

（４）数学的な考え方と活動の流れ

三角形の合同の証明							〈２年〉【図形の性質】
課　題	２つの線分ＡＢとＣＤは長さが等しくて平行である。点Ｏは線分ＡＤとＢＣとの交点である。このとき，△ＯＡＢと△ＯＣＤが合同であることを証明しなさい。						
数学的な考え方	1	2	3	4	5	6	7	8
			○					

目　標	適切な三角形の合同条件を用いて，三角形の合同を証明する。このことから，予想される性質がいつでも常に成り立っていることを，論理的に明らかにする方法を理解する。

■　活動の流れ

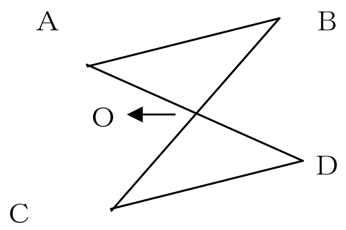
数学的な考え方	学習活動
$\boxed{3}$　演繹的に推論する	①　合同な三角形を２つ１組として３組６個をランダムに配列して与え, 合同な三角形を示し，そこで成立している合同条件を答える。
	↓
$\boxed{3}$　演繹的に推論する	②　三角形の合同を証明する問題において, まず仮定と結論を明らかにする。
	↓
$\boxed{3}$　演繹的に推論する	③　（解答例を参考に）三角形の合同を証明する。
	↓
$\boxed{3}$　演繹的に推論する	④　証明を発表する→自分や友人の証明の問題点を明らかにし，完成に持っていく。
	↓
$\boxed{3}$　演繹的に推論する	⑤　三角形の合同の証明についてまとめる。

■　準備するもの

三角形の合同条件をまとめたシート

■学習活動と具体的な支援

	学習活動		支　援　▲JSL 支援事項△留意事項
導入	①三角形の３つの合同条件についての復習	※方法としては， ①３条件を口頭発表する。 ②合同な三角形の組を複数を与え，それぞれについてその根拠を述べる等。	△合同な三角形を２つ１組として３組６個をランダムに配列して与え，合同な三角形を示し，そこで成立している合同条件を答える。 ▲「三角形の合同条件」について，条件①②③を図と語彙で整理しておく。 復習の段階では， ①合同な２つの三角形を見出す ②その根拠となる合同条件を特定する の２点について確認できればよい。 ▲三角形の合同についての復習 ・「２つの三角形が‘合同（ごうどう）’とは，角も，３つの辺も，‘全部同じ’ということ」 →色の違う色紙で合同の三角形△ABC と△A’B’C’を作り，表や裏で重ねても（回転移動・平行移動・対称移動）ぴったり同じであることを示す。 ・２つの三角形が合同のときは，記号≡を使って △ABC≡△A’B’C’　と書く ・等しい角や辺を探し，マークした上，図形の下に「条件①」のように書き込む。 ▲　証明に足りない条件を探す練習 ２つの△ABC と△DEF の図を用意し，それぞれあとどんな条件があれば合同だといえるか。 （図も用意） 例）①AB=DE，∠B＝∠E ②∠A＝∠D，∠C＝∠F ③AC=DF，BC＝EF

	学習活動		支　援　▲JSL 支援事項△留意事項
展開1		課題「下の図で，２つの線分ＡＢとＣＤは長さが等しくて平行である。点Ｏは線分ＡＤとＢＣとの交点である。このとき，△ＯＡＢと△ＯＣＤが合同であることを証明しなさい。」  	△初期の頃は，三角形の合同を利用する証明問題ではなく，三角形の合同そのものを証明する問題でよい。 ▲やさしい例題を利用して「証明」のパターンを知る。（課題と図，解答をプリントにして見比べられるように用意しておく。） ▲「証明」を（母語の）辞書で引かせてもよい。 ⇨「$\boxed{\text{△ＯＡＢと△ＯＣＤが合同である}}$こと」 ▲で囲み，色ペンで下に（結論）と書く。「後で，これを答えの最後に書きます。」
		・最初に，この問題で「証明しなければいけないこと」を探す。 「どの三角形とどの三角形の合同をいえばよいか。」 △ＯＡＢと△ＯＣＤ	
	②三角形の合同を証明する問題において，まず仮定と結論を明らかにする。	「仮定は何か」 ＡＢ＝ＣＤ ＡＢ//ＣＤ Ｔ「結論は何か」 △ＯＡＢ≡△ＯＣＤ Ｔ「仮定から導かれることは何か」 「…もしくは…」 Ｔ「角について成り立っていることはないか？また，辺について成り立っていることはないか？理由を忘れずに。」 ・次に，問題から分かること（仮定）を探し，図に書き込む。 「仮定からさらに導かれる性質は何だろう。理由も忘れずに。」	▲「２つの線分ＡＢとＣＤは長さが等しくて／平行である」に下線を引き，（仮定）と書く。図の該当部分について，「等しい＝」「平行//」記号を同じ色で記入する。 ▲「△ＯＡＢ≡△ＯＣＤ」を囲み，色ペンで下に（結論）と書く。「後で，これを答えの最後に書きます。」 ＜板書＞ 仮定： AB＝CD　AB//CD 結論： △AOD≡△COD ▲仮定から導かれる～： 仮定から分かる，言えることは何か。 ▲角（辺）について成り立つこと： 平行線があるとき，２つの角が等しいところがあったよね。それはどこかな？ △記号を使って示した下に，理由を言葉で入れる。記号の前でもよいことに触れる。

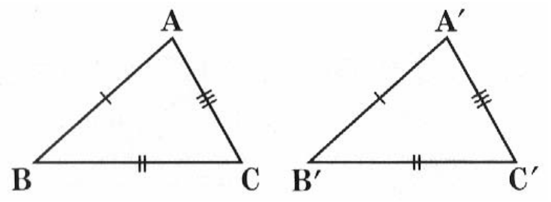
		∠ＯＢＡ＝∠ＯＣＤ （平行線の錯角） ∠ＯＡＢ＝∠ＯＤＣ （平行線の錯角） ∠ＡＯＢ＝∠ＣＯＤ（対頂角） 誤ＯＡ＝ＯＤ　or　ＯＢ＝ＯＣ （結論から更に導かれる事柄） 誤ＡＢ＝ＣＤ （これは仮定そのもの） 誤ＡＢ//ＣＤ （これは仮定そのもの）	
	③三角形の合同を証明する。	Ｔ「△ＯＡＢと△ＯＣＤの合同を示すためには，これらのどれを使えばいいか，また，どういう合同条件が成り立つか。」 ・ＡＢ＝ＤＣ ・∠ＯＢＡ＝∠ＯＣＤ ・∠ＯＡＢ＝∠ＯＤＣ ・「１辺とその両端の角がそれぞれ等しい」	▲ 証明問題のパターン： ・＿＿＿＿＿＿のとき／下・右・左の図である。 ↑ （仮定）は問題文の最初に出てくる。 ・「$\boxed{}$ を証明しなさい」 ↑ 証明しなければいけないこと（＝結論）。最後に出てくる。 △証明活動の中で，机間指導や板書指導によって， ｱ)結論から逆に辿っていく思考 ｲ)成立している事柄を図中に記入しながら道筋を考える，などの方法についても触れる。 △証明の書式については，数学的な書式に拘る必要はなく，意味を相手に伝えることを第一義的に考えればよい。

	学習活動		支　援　▲JSL 支援事項△留意事項
展開2	④証明を発表する。 （２～３名） ↓ 自分の解答を修正する。	・友人の発表を聞き，理解するとともに，自分の考え方との類似点や相違点を整理する。 ・友人の発表を参考にして，自分の考え方や証明の不完全な部分を補い，修正する。 基本的には， ・示すべき２つの三角形が最初に挙げられているか ・理由・根拠が述べられているか ・循環論法になっていないか ・結論が使われていないか ・結論が根拠になっていないか ・成り立っているかどうか不明な式がないか ・合同条件が正しく述べてあるか	△正しく書けている生徒が発表するだけでなく，論法や書式について考える際のたたき台となりそうな，タイプの違う生徒を２名程指名して板書発表させ，両者の相違点や問題について考えさせることで，両者の証明を生徒の目の前で完成に持っていくような指導も効果的であろう。 ▲JSL 生徒が発表する場合，発表の仕方の定型フォームを事前に与え，空欄に必要事項を入れ込んで読み上げれば発表文章になるようにしておく方法もある。時には皆の前で発表することが自信につながる。
まとめ	⑤三角形の合同の証明についてまとめる。	三角形の合同の証明について，その初歩をまとめる。 ・仮定 ・結論 ・仮定から更に導かれる性質 ・三角形の合同の証明の標準的書式	△多様な証明については，今後それを扱う場面で，それぞれ学習する。

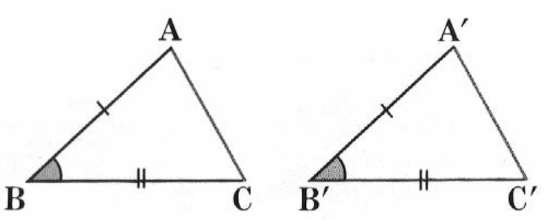
指導案による授業前の補足活動

Ⅰ.三角形の合同条件

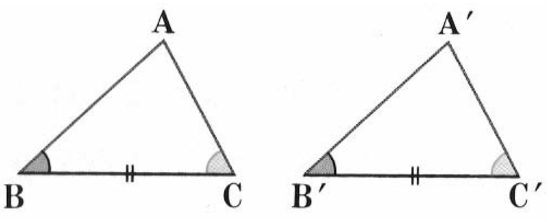
①３辺がそれぞれ等しい。



②２辺とその間の角がそれぞれ等しい。



③１辺とその両端の角がそれぞれ等しい。



語彙と表記の確認＜理解・表現支援＞

角→位置で確認
∠A，∠B とかく。
（∠A のことを，∠BAC や∠CAB とかくこともある）

辺…１辺，２辺，３辺　　／線分
（辺）AB，（辺）BC，とかく。

それぞれ（両方が，どちらも，どれも）

等しい（同じ）
・角，辺が等しい場合の図へのマークの仕方を復習
・辺が等しいとき…AB＝A’B’
・角が等しいとき…∠A＝∠A’　　　とかく。

両端→位置で確認

その他：

対応する→位置で確認「∠A に対応するのは∠？」

「２つの三角形が合同かどうかわからないとき，①か②か③になっていれば「合同」と言えます。例えば△ABC と△A’B’C’で，①のように２つの３角形のそれぞれの辺が３ｃｍ，４ｃｍ，５ｃｍで同じだったら重ねなくても合同だと分かる。もし①（全部の辺が同じ）だったら合同だよ，と言える。これを「合同条件（の①)」と言います。三角形の合同条件はこの３つがあります。」

Ⅱ.「証明の根拠」

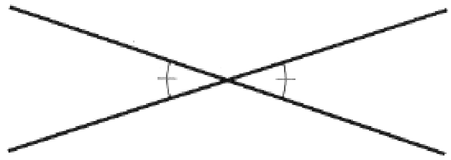
→よく使われるもの（↓）を図入り，ルビ入りのプリントにし，証明を考えるときに参照できるようにする。(次頁参照)

・根拠…理由（どうしてそういえるのか)
対頂角の性質／平行線と角の関係（同位角・錯角）／三角形の内角と外角の性質
／合同な図形の性質　など

証明のよりどころ（証明のときに使うことができるもの）

対頂角の性質

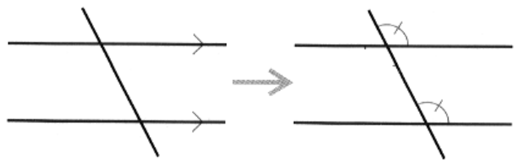
1　対頂角は等しい。



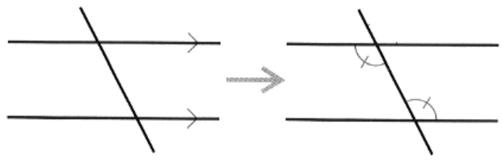
平行線と角の関係

２直線に１つの直線が交わるとき

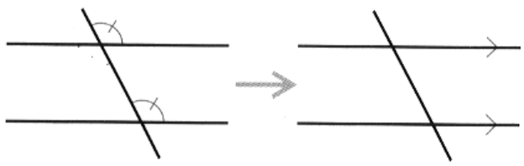
1　２直線が平行ならば，同位角は等しい。



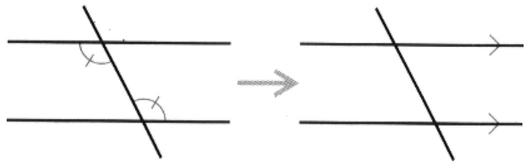
2　２直線が平行ならば，錯角は等しい。



3　同位角が等しければ，２直線は平行である。

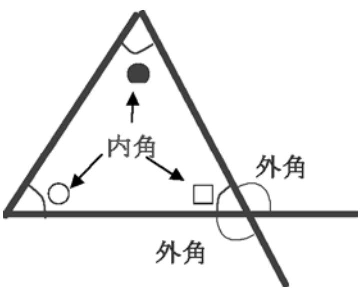


4　錯角が等しければ，２直線は平行である。



三角形の内角と外角の性質

1　三角形の内角の和は１８０°である。　　　（１８０°／ひゃくはちじゅう ど）

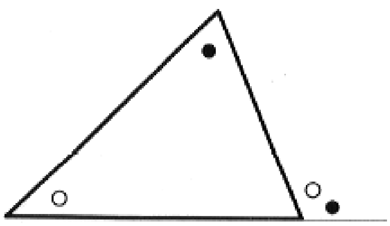


● +○+□＝１８０°

2　三角形の１つの外角は，

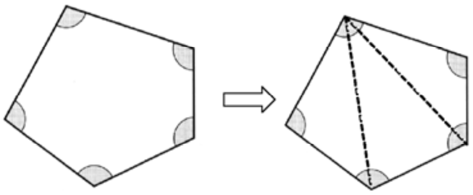
それと となり合わない　（＝となりではない）

２つの内角の和に等しい。



多角形の内角の和と内角の和の性質

1　ｎ角形の内角の和は，１８０°×（n－２）　である。

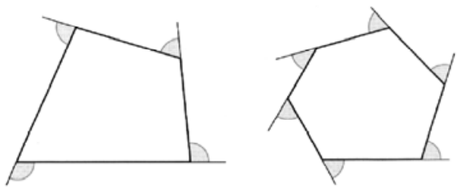


５角形のときは，

180°×（5-2）＝540°

だね。

2　多角形の外角の和は，３６０°　である。



どんな多角形でも外角を全部

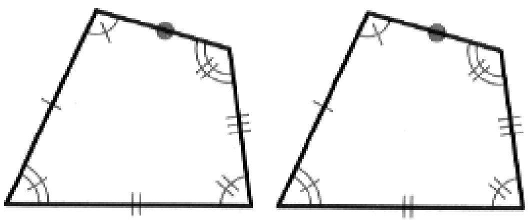
たすと，３６０°だね。

合同な図形の性質

1　合同な図形では，

対応する辺の長さは等しく，

対応する角の大きさも等しい。

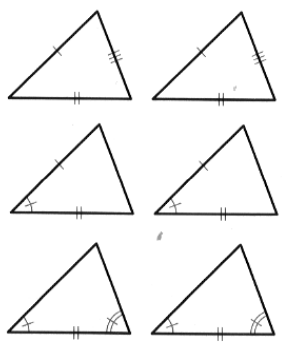


三角形の合同条件

1　３辺がそれぞれ等しい。

2　２辺とその間の角がそれぞれ等しい。

3　１辺とその両端の角がそれぞれ等しい。



等式の性質

1　ａ＝ｂ，ｂ＝ｃ　ならば　ａ＝ｃ　である。

2　ａ＝ｂ　ならば　ａ＋ｃ＝ｂ＋ｃ，ａ−ｃ＝ｂ−ｃ，

ａ×ｃ＝ｂ×ｃ，ａ÷ｃ＝ｂ÷ｃ（ｃ＝０ではない）

面積や体積の公式なども証明のよりどころとして使うことができる。