

数学－8（第3学年） 証明を読むことで、数の性質について考える事例

【学習活動の概要】

1 単元名 式の展開と因数分解

2 単元の目標

文字を用いた簡単な多項式について、式の展開や因数分解ができるようにするとともに、目的に応じて式を変形したりその意味を読み取ったりする能力を伸ばす。

3 評価規準

【数学への関心・意欲・態度】

・様々な事象を簡単な多項式などでとらえたり、それらの性質や関係を見いだしたりするなど、数学的に考え表現することに関心を持ち、意欲的に数学を問題の解決に活用して考えたり判断したりしようとしている。

【数学的な見方や考え方】

・簡単な多項式などについての基礎的・基本的な知識及び技能を活用しながら、事象に潜む関係や法則を見いだしたり、数学的な推論の方法を用いて論理的に考察し表現したり、その過程を振り返って考えを深めたりするなど、数学的な見方や考え方を身に付けている。

【数学的な技能】

・目的に応じて式を変形したりその意味を読み取ったり、文字を用いた簡単な多項式について、式の展開や因数分解をしたりするなど、技能を身に付けている。

【数量や図形などについての知識・理解】

・式の展開の公式などを理解し、知識を身に付けている。

4 教材

本単元では、第2学年での学習に引き続き、文字を用いた式で数量及び数量の関係をとらえ説明することについて指導する。文字式を用いて説明することについては、苦手意識を持つ生徒が少なくない。ここでは、文字を用いた式で自ら説明することの前提となる指導として、「連続する2つの奇数の積に1を加えた数は4の倍数になる」ことの説明を読む活動を授業に取り入れ、その過程を理解し、文字式を用いて説明することの意義を確認するとともに、新たな性質を見いだすことができるようにする。

「連続する2つの奇数の積に1を加えた数は、どんな数になるだろう。」

→3, 5のとき, $3 \times 5 + 1 = 16$

7, 9のとき, $7 \times 9 + 1 = 64$

...

→4の倍数になるのではないかな？

5 主な学習活動

(1)単元の指導計画(全15時間)

	学習活動	言語活動に関する指導上の留意点
第一次	○単項式と多項式の乗法, 多項式を単項式で割る除法, 簡単な一次式の乗法, 公式を用いる簡単な式の展開をすることができる。(6)	<ul style="list-style-type: none"> ・予想を全体で確認して, 予想が成り立つことの証明を提示し, 各自でその内容を読み取る時間を設ける。 ・「連続する2つの奇数は, なぜ $2n-1$, $2n+1$ と表されるのか」や「$4n^2$ が4の倍数であるといえるのはなぜか」などについて全体で話し合う場面を設ける。 ・説明の結論から, 新たな性質が見いだせないかを考えさせる。
第二次	○因数分解は展開の逆の操作であることを知り, 式の形に着目して簡単な式の因数分解をすることができる。(6)	
第三次	○数や図形の性質が成り立つことを, 文字式を用いて説明することができる。(3: 本時1/3)	

(2)本時の学習

①目標

連続する2つの奇数の積に1を加えた数は4の倍数になることの説明を読み、その意味を理解し、新たな数の性質を見いだすことができるようにする。

②本時の展開

○問題を提示し、具体的な数を用いて各自で予想する。

○各自で示された説明を読み、その内容について全体で確認する。

○説明の結論を見直し、新たな数の性質が見いだせないかを考える。

【解説】

【指導事例と学習指導要領との関連】

中学校学習指導要領の第2章第3節数学第2(第3学年)の2において、A(2)ウ「文字を用いた式で数量及び数量の関係をとらえ説明すること。」が示され、また、数学的活動のウにおいて「数学的な表現を用いて、根拠を明らかにし筋道立てて説明し伝え合う活動」が示されている。

本事例のねらいは、「連続する2つの奇数の積に1を加えた数が、4の倍数になる」ことの説明を読み、その過程を理解し、文字式を用いて説明することの意義を確認するとともに、新たな性質を見いだすことができるようにすることである。数の性質を文字式を用いて説明したり、図形の性質を証明したりすることは、中学校数学科において言語活動を通して学習すべき重要な内容であるが、説明や証明を読むことも、説明や証明をする前段階の素地指導として、また、新たな数や図形の性質を見いだす場面として大切にする必要がある。ここでは、提示された説明を読み、仮定や結論、用いられている根拠などを明らかにしたり、論理的に確かめたり、さらに新たな性質を読み取ったりする場面を設定した。

【言語活動の充実の工夫】

○与えられた説明を読み、解釈することができるようにする。

文字式を用いて数の性質などを説明することに苦手意識をもつ生徒には、そもそも説明をどのように構成すればよいか明瞭に理解できていない者が少なくない。ここでは、そうした状況を改善するため、説明を構成する前段階として、完成した説明を読んで解釈し、その内容について話し合う場面を設定した。ここでは、「連続する2つの奇数の積に1を加えた数は4の倍数になる」ことを取り上げ、次のように授業を進めた。

- (1) 各自で説明を読み、内容を理解する。
- (2) 説明の内容で分からなかった部分を自由に出し合って話し合う。

(2)の場面では、まず、「連続する2つの奇数は、どうして $2n-1$ 、 $2n+1$ と表されるのか」が話題になった。「そんなことは当たり前」と思っていた生徒にとっても、全員に納得してもらいように分かりやすく説明することは難しいようであった。ここでは、生徒から以下のような説明が出された。

- ・ n に具体的な数を代入すると、 $n=1$ のとき1と3、 $n=2$ のとき3と5、…と連続する2つの奇数になるから。
- ・ $2n-1$ 、 $2n+1$ が、偶数 $2n$ から1を引いた数と1をたした数になっているから。
- ・ $(2n+1)-(2n-1)=2$ で、2つの数の差が2になるから。

同じように、「 $(2n-1)(2n+1)+1$ を変形すると $4n^2$ になるのか？」や「 $4n^2$ が4の倍数であるといえるのはなぜか」などについて話し合った。明確に書かれていない部分を話し合いを通じて補うことで、説明の内容をより深く理解できるようにした。

○説明の結論を見直し、新たな数の性質などを見いだせるようにする。

「 $4n^2$ が4の倍数であるといえるのはなぜか」について考えた後に、「 $4n^2$ が4の倍数以外にどのような数を表しているか？」を考える場面を設け、説明の結論を見直し、発展的に考えるきっかけをつくった。 $4n^2$ を変形して考えるように促したところ、

- ・ $4n^2=2 \times 2n^2$ だから「偶数」になる。→でも、 $4n^2$ は4の倍数なんだから、それは明らか。といった話し合いになった。また、

- ・ $4n^2=(2n)^2$ だから「2つの奇数の間にある偶数を2乗した数」になる。

という意見が出された。ここでは、 $2n$ が「2つの奇数の間にある偶数」を表すことの説明の場面を設けるとともに、具体的な数を用いて「2つの奇数の間にある偶数を2乗した数」になることを確認した。このように、説明の結論を見直し、式を改めて解釈することで、最初に予想したこと以外にも、新たな数の性質を見いだせることが分かった。

さらに、問題の条件を見直し、「連続する2つの奇数以外にも、それらの積や和などを調べて、数の性質を見いだすことはできないだろうか。」と発問し、全体で検討する場面を設けた。その結果、連続する2つの奇数を偶数に変え、「連続する2つの偶数の積に1を加えた数はどんな数になるか。」を調べてみてはどうかという意見が出され、具体的な数で調べることで、「2つの偶数の間にある奇数を2乗した数になる」という予想を立てるとともに、各自でその説明に取り組む場面を設けた。授業の前半で、説明を読む活動を十分に行っていたので、その経験を基にして、多くの生徒が自ら説明をするに取り組むことができた。

説明

n を自然数とすると、連続する2つの奇数は、 $2n-1$ 、 $2n+1$ と表される。

したがって、それらの積に1を加えた数は、
 $(2n-1)(2n+1)+1$

$$= 4n^2$$

n^2 は自然数だから、 $4n^2$ は4の倍数である。
したがって、連続する2つの奇数の積に1を加えた数は、4の倍数である。