第６章

算数・数学における日常生活、産業・社会・人間と関連した発展的題材

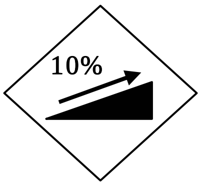
		題材分類	高数Ｉ

題材主題	**勾配 100%！こんな道、車が登れるの。**
副題	正接関数（tanθ）を使って勾配と角度の関係を調べる。

学習指導要領の教科・科目	**学習指導要領の大項目**	**学習指導要領の中項目**	**学習指導要領の小項目**	**備考**
高校数学Ｉ	（３）図形と数量	ア　三角比	（ア）正弦、余弦、正接	

学習内容のキーワード	正接関数、角度、図形と計量	**活用場面のキーワード**	車両の登坂性能、登坂路設計 自動車の登坂可能勾配

題材とその活用場面



道路の上り坂の手前のこんな標識を見たことがあると思います。これは勾配 10%の上り坂という標識です。ところで勾配 10%は、どのくらいの傾斜角度の坂なのでしょうか。10%くらいなら容易に上りそうですが、100%以上となるとどうでしょうか。自動車は、どのくらい勾配まで登れるか？そのときの傾斜は、何度くらいになるでしょうか？傾斜角度と勾配の関係を知るには、正接関数が必要です。

説明

上り勾配 10%は、坂の傾斜角度ではなく、水平方向に 100m進んで 10m上るという比率の意味です（http://www.mlit.go.jp/road/roadqa/046.html）。坂の傾斜角度を仮にθ（図１参照）とおくと、正接関数（tanθ）を用いて、

tanθ=10m/100m=0.1

と表現できます。つまり tanθが勾配になります。この式から傾斜角θを算定するには、関数電卓が必要ですが、約６°です。傾斜角 30°の坂は、tanθが、

tanθ=1/√3=0.58

と容易に計算でき、勾配 58%ということになります。

一方、自動車のカタログなどにも記載されていることがありますが、自動車の最大登坂能力も傾斜角度ではなく、tanθで記載されています。普通乗用車であれば、大体 0.5～0.7 位です。これを角度に直すと約 25°～35°といったところです。ところが、ジープのように悪路や道路以外の場所の走行も想定して作られた車では、tanθが約 1.2 程度（勾配 120%）のものもあります。角度に直すと約 50 度くらいです。従って、勾配 100%が登れる車は、普通に存在するのです。なお、最大登坂能力に相当する勾配は、非常に低速走行時に登坂が可能になると考えてください。

日光いろは坂や箱根峠の坂の急勾配さは、有名ですが、それでも最大勾配は、15%以下です。傾斜角度では、約９°以下です。高速道路では時速 80km くらい、一般道でも時速 30km 以上で継続的に走行するわけですから、約６°や９°でも急勾配となるのでしょう。

勾配 10%を、勾配 10°と勘違いすると大変なことになる職業もあります。10%のつもりが 10°で高速道路を建設したら、いろは坂なみの勾配で大渋滞です。

（薮田尚宏）

題材分類	高数Ⅰ

添付図表

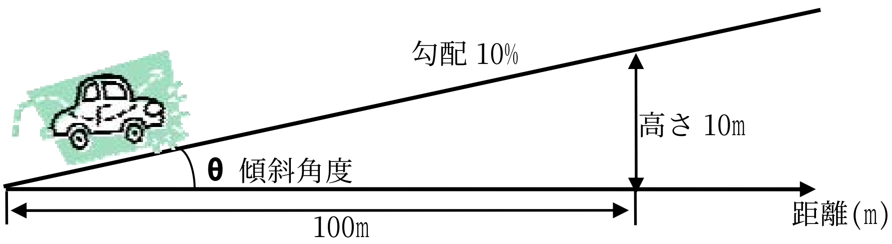


図１　坂道の勾配と傾斜角の関係

出典情報

道路勾配：国土交通省道路局『よくある質問と回答』（http://www.mlit.go.jp/road/roadqa/046.html）

題材分類	高数Ⅱ

題材主題	10 のマイナス 6 乗の意味
副題	実社会で利用されるリスク指標

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
高校数学 II	（3）いろいろな関数	イ指数関数と対数関数	（イ）指数関数	

学習内容のキーワード	指数、確率	活用場面のキーワード	リスク指標、リスク基準

題材とその活用場面

10 のマイナス 6 乗とは、“0.000001”という数字です。このような数字は日常生活で使われるのでしょうか？

危険なことが起こるかもしれない可能性（リスク）は確率で表されます。みなさんの「これなら大丈夫だ」と受け容れる事ができる限界はどれくらいでしょう。指数標記の学習内容は、社会のリスク基準を表すことにも活用されています。

説明

リスクとは「事象の発生確率と結果の組合せ」と定義されています。少し分かりにくいですが、未来において、望ましくない結果が生ずるとき、その影響の大きさと起こりやすさを合わせたものを意味します。リスク指標とは、そのようなリスクを定量的に表したものです。

2000 年前後に世界中で問題となった BSE 問題によるクロイツフェルトヤコブ病（CJD）について考えてみます。イギリスの人口は約 5700 万人です。狂牛病に感染した牛が約 18 万頭いた中、1996 年～2001 年までに約 100 人強の人が CJD を発病しました。1 年あたりどれくらい（確率）の人が死亡（結果）すると言えるでしょうか。発症の可能性は、ひとりあたりおよそ 3×10^{-7}／年となります。時を同じくして日本では、わが国の感染牛の状況や、特定危険部位の排除といった対策によって、10^{-12}／年程度のリスクであるとの試算値も発表されました。

よく、リスクの大きさを表すとき、10^{-6}／年を下回れば、一般に社会に許容されると言われていますが、CJD では発生した時の影響の大きさを重要視する（予防原則）ことによって、リスクによる議論はあまり受け容れられていません。

この数値は、次のことを表します。

◆ 一箇所（あるいは一人）において 100 万年に 1 回起こる

それは、明日にでも、あるいは 10 年後、あるいは 100 万年後に起こるかもしれないことを意味します。

◆ 100 万箇所存在すれば、1 年にどこかで 1 回起こる

◆ 100 万人いれば、1 年に一人影響を受ける

この 10^{-6} という数値の考え方のひとつに、オランダでの年齢階級別死亡率とリスクの考え方があります。この考え方を日本の人口に当てはめたものを図 1 に示します。

みなさんの身近なリスクを数値化すると、表 1 のようにまとめられます。

10^{-6} という数値が持つスケール感を、持っていただけましたか？

（丸貫徹庸）

題材分類	高数 II

添付図表

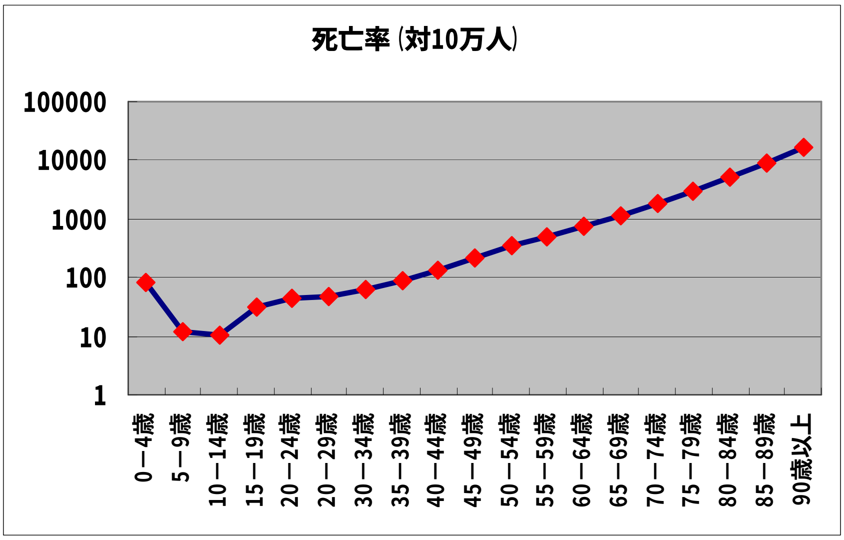


図　日本の年齢階級別死亡率（2002 年（平成 14 年）、厚生労働省人口動態統計より）

※　5 歳刻みの人口分布に対して、10～14 歳のこどもが、毎年 10 万人あたり 10.4 人死亡しています。全年齢階級を通して、この 10～14 歳の年齢階級が最も死亡率が低いことが分かります。オランダでの考え方を適用すれば、この値の更に 100 分の 1（すなわち、10^{-6}／年）よりも小さければ、人々に受け容れられるだろうというものです。日本でも、オランダでも同じ値、同じ年齢階級が対象となっています。

表 1　身近なリスク

毎年の死亡者	7.7×10^{-3}／年
不慮の事故	3.1×10^{-4}／年
自殺	2.3×10^{-4}／年
交通事故	9.8×10^{-5}／年
溺死・溺水	4.6×10^{-5}／年
他殺	6.0×10^{-6}／年

出典情報

原子力安全委員会、原子力安全白書、平成 15 年版、第 1 編第 3 章 p28
第 1 回食の安全・安心シンポジウム『牛肉の安全・安心を考える』、日本経済新聞、2004 年 6 月 10 日（朝刊）

題材分類	高数Ⅱ

題材主題	2^{128} 台のコンピュータ
副題	インターネットにおけるコンピュータの台数と指数の関係を学ぶ

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
高校数学Ⅱ	（３）いろいろな関数	イ 指数関数と対数関数	（イ）指数関数	

学習内容のキーワード	指数、ビット	活用場面のキーワード	IPv4、IPv6、インターネット、IP アドレス

題材とその活用場面

IPv6 規格における IP アドレス数（区別可能なコンピュータの台数）には指数が活用されています。

説明

インターネットでは、世界のどこかのコンピュータから情報を取ってくる、または、どこかのコンピュータに情報を送信しますので、通信相手となるコンピュータを識別する名前のようなものが必要となります。しかし、インターネットは世界中のコンピュータ同士が接続されており、その台数の総計は膨大な数になりますから、それらのコンピュータすべてに違った名前を付けることは容易ではありません。そのため実際には、「IPv4」という規格に基づき、各コンピュータに対して、32 ビットの番号（コンピュータが扱うことのできる「0」または「1」からなる 32 桁の数）が付けられており、これを「IP アドレス」といいます（IP アドレスは、通常、8 桁ごとに区切った 4 組のビット列をそれぞれ十進法に直した数字の組み合わせにより表記します。）。ここで、「0」か「1」からなる 32 桁の数は、その組み合わせにより、2^{32} 通りあることになりますが、これを計算すると、4294967296 となります。約 43 億ですね。現在の世界の人口が約 61 億人といわれていますから、これでは１人に１つずつ IP アドレスが配れないことになりますが、事実として、既に IP アドレスの不足が問題化しています。

そのため現在では、この IP アドレス不足を解決するための決定的な手段として、「IPv6」という次世代の規格が導入され始めています。これは 128 ビットのアドレスを使用します。つまり、単純に考えると 2^{128} 台のコンピュータが識別できるようになるわけです。

なお、2^{128} を計算すると、340,282,366,920,938,463,463,374,607,431,768,211,456（凡そ 3.4×10^{38}）となります。これならば、IP アドレスが枯渇する心配はなさそうですね。

（瀧陽一郎）

題材分類	高数Ⅱ

添付図表

IPv4 では・・・

$$\underbrace{000000\cdots000000}_{32\text{桁}} \sim \underbrace{111111\cdots111111}_{32\text{桁}} \qquad 2^{32}\text{通り}$$

IPv6 では・・・

$$\underbrace{000000000\cdots000000000}_{128\text{桁}} \sim \underbrace{111111111\cdots111111111}_{128\text{桁}} \qquad 2^{128}\text{通り}$$

図１　IPv4 および IPv6 のビットの組み合わせ

出典情報

日立インフォネット「IP 電話よもやま話」（http://www.hitachi-infonet.co.jp/column/05_01.html）

題材分類	高数Ⅱ

題材主題	**2002年4月以降の地図とそれ以前の地図の緯度・経度の違い**
副題	三角関数を活用した座標変換による緯度・経度の変更

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
高校数学Ⅱ	（３）いろいろな関数	ア　三角関数	（イ）三角関数とその基本的な性質	発展的学習

学習内容のキーワード	三角関数、座標変換、楕円体	活用場面のキーワード	地図、緯度、経度

題材とその活用場面

地球の形状は回転楕円体として近似され、緯度・経度はその回転楕円体での位置を表すものとして定義されています。その回転楕円体は、以前は明治時代に採用されたベッセル楕円体を使っていたのですが、人工衛星等によって地球規模で観測が行われるようになった現在では地球全体に適合した形としてGRS80楕円体が使われています。

2002年4月1日の測量法の改正に伴い、日本地図の緯度・経度が変わりました。同じ地点であっても以前の地図と今の地図では緯度・経度が異なります。以前は日本測地系という座標系に基づいていましたが、現在では世界測地系という座標系に基づいています。地点によって異なりますが、今の地図に基づく場所の表記は、結果として以前の地図に比べて、距離で言えば南東方向に約 400～450m動いた表記になっています。したがって、昔の緯度経度情報をもとに現在市販されている地図を見る場合、その緯度・経度地点から北西方向に約400～450mの地点を見る必要があることになるので注意が必要です。

この両者の座標系は三角関数を使って変換することが可能であり、三角関数の学習が地図の座標変換などに活用されています。

説明

以前の日本測地系の座標を新しい世界測地系の座標に変換するためには次のようなステップで計算します。

①日本測地系の楕円体上の(緯度,経度,高さ)を、日本測地系の地心座標(X,Y,Z)に変換（地心座標とは地球の重心を原点とする３次元直交座標のこと）

②日本測地系の地心座標(X,Y,Z)に世界測地系とのずれを加算

③②の地心座標(X,Y,Z)を世界測地系の楕円体上の(緯度・経度・高さ)に変換

ここで、①の(緯度,経度,高さ)から地心座標(X,Y,Z)への変換式を例示すると以下のとおりとなります。

$$\left.\begin{array}{l} X=(N+\text{高さ})\times\cos(\text{緯度})\times\cos(\text{経度}) \\ Y=(N+\text{高さ})\times\cos(\text{緯度})\times\sin(\text{経度}) \\ Z=\{N+(1-e^2)+\text{高さ}\}\times\sin(\text{緯度}) \end{array}\right\}\quad\text{（式１）}$$

ここで、$e^2=f\times(2-f)$であり、日本測地系ベッセル楕円体の扁平率 f は 1／299.152813 です。

また、$N=a/\sqrt{(1-e^2\times\sin^2(\text{緯度}))}$であり、ベッセル楕円体の赤道半径 a＝6377397.155m です。

なお、③の計算については、世界測地系 GRS80 楕円体の扁平率 f を 1／298.257222101、赤道半径 a を6378137m として、（式１）の逆計算をすることになりますが、そう簡単ではなく、（式１）を最適に説明する(緯度,経度,高さ)を繰り返し計算によって求めることが必要となります。

地球の形状の近似には、楕円をその短軸の回りに回転させた回転楕円体が使われ、地球の形状を最もよく表す回転楕円体は地球楕円体と言われます。以前の日本測地系が準拠していたベッセル楕円体、現在の世界測地系が準拠しているGRS80楕円体の間のその形状の違いは、赤道半径 a と扁平率 f[=（赤道半径ー極半径）／赤道半径]の違いとして表されます。

以上のように、GPSなどの人工衛星等の世界的な技術発展によって、座標系の変更が生じ、日本の従来の地図表記も現在では修正が加えられているわけですが、三角関数の学習がこうした座標変換に活用されているのです。

（堤一憲）

題材分類	高数Ⅱ

添付図表

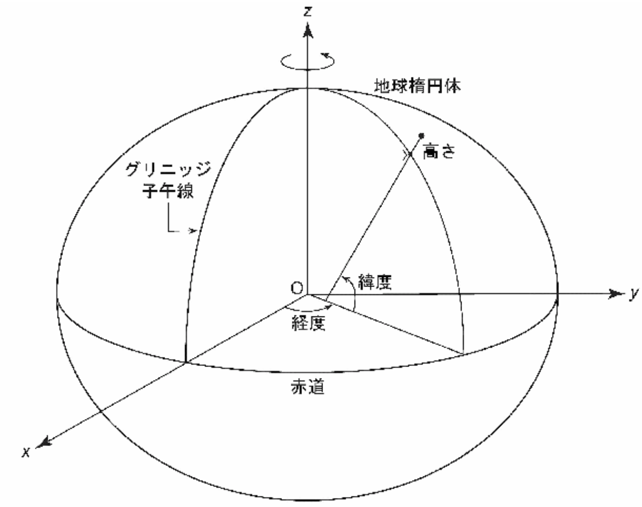


図１　地球重心に原点を持つ３次元直交座標系と，地球楕円体を基準とした経度，緯度，高さ．

（http://wwwsoc.nii.ac.jp/geod-soc/web-text/part2/2-1/2-1_figures/Fig5.jpgより）

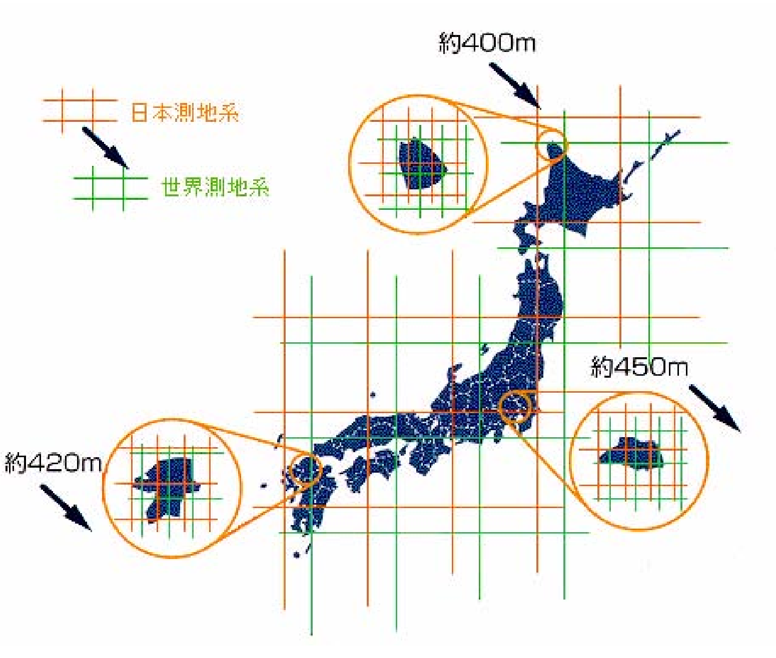


図１　日本測地系と世界測地系との違い

（http://www.gsi.go.jp/LAW/G2000/g2000-h3.htmより）

出典情報

日本測地学会(2004) 『CD-ROM テキスト測地学 Web 版』，以下より検索，
URL: http://wwwsoc.nii.ac.jp/geod-soc/web-text/index.html
国土地理院(2002) 『世界測地系移行の概要』，以下より検索，
URL: http://www.gsi.go.jp/LAW/G2000/g2000.htm

事例シート

		題材分類	高数Ⅱ

題材主題	GPS 技術で地面の動きを正確に測って地震予知
副題	複数の人工衛星電波を受信して距離を正確に測る技術

学習指導要領の教科・科目	**学習指導要領の大項目**	**学習指導要領の中項目**	**学習指導要領の小項目**	**備考**
高校数学Ⅱ	（１）式と証明・高次方程式	イ　高次方程式	イ　高次方程式	

学習内容のキーワード	連立方程式	**活用場面のキーワード**	カーナビ、GPS、座標、距離、地殻変動、地震予知

題材とその活用場面

カーナビ（カーナビゲーションシステム）などに使われている GPS（Global Positioning System）という宇宙技術を活用して２点間距離を正確に測る地震予知網が国土地理院をはじめとする大学・国の研究機関で展開されています。観測点と観測点の間の距離を正確に測ることによって、地震直前に起こる可能性のある地殻の動きを捉えようというもので、全国 1,000 箇所以上に観測網が張り巡らされています。

方程式の学習が GPS という技術を通して地震予知に活用されています。

説明

GPS 衛星からの電波発信時刻と受信機での受信時刻の差を測定し、それに電波速度（光速）を掛けることで人工衛星と受信機との距離を求めることができます。カーナビは、人工衛星の位置が正確に把握されていることから、自車の位置座標（x、y、z）の３変数は、３つの人工衛星から電波を受信して人工衛星と受信機間距離に関する３つの連立方程式を解くことで求めることができます。ただし、これは人工衛星と受信機の時計が正確であることが大前提です。電波速度は光速であるために、ほんの少しの時計の誤差でも大きな距離誤差となって現れてしまうからです。

ある人工衛星 i（A、B、C）と受信機 j（x、y、z）の間の距離について、次の方程式が成り立ちます。

$$L=\sqrt{(x_j-A)^2+(y_j-B)^2+(z_j-C)^2}+c\times dt_i+c\times dt_j$$

ここで、左辺の L は（電波発信時刻－受信時刻）×光速 c で求められる距離であり、右辺の第１項は人工衛星と受信機の間の真の距離、dt_i と dt_j はそれぞれ人工衛星と受信機の時計誤差ですので、この時計誤差を消去しないと正確な受信機の位置は決定できないのです。

そこで、座標位置が正確にわかっている基準点を用いて、以下のような手順で衛星と受信機の時計誤差を消去することで正確な観測点間距離（＝１つの観測点は座標が正確にわかっていることから、もう一方の座標を求めることと同じ）を測る方法が考え出されました。

手順１：図１における L_{A2} から L_{A1} を引き算することで、お互いに共通している人工衛星Ａの時計誤差を消去することが可能となります。（同様に人工衛星Ｂの時計誤差も消去できます。）

手順２：図１における L_{A2} から L_{B2} を引き算することで、お互いに共通している受信機２の時計誤差を消去することが可能となります。（同様に受信機１の時計誤差も消去できます。）

このように、複数の人工衛星と複数の観測点の距離方程式を組み合わせることによって、衛星－観測点間距離に大きな測定誤差を与えていた時計誤差を消去することができ、一方の観測点が既知であれば、もう一方の観測点の座標（x、y、z）を連立方程式を解くことで正確に求めることができます。結果として２つの観測点間の距離を正確に測定することができます。この GPS による測量技術を使えば、数十～数百 km の距離を数 mm～数 cm の高精度で測定することができ、もし地震前に前兆的な地殻変動が起こればそれをリアルタイムに捉え地震予知につなげることも可能と言えます。

（堤一憲）

題材分類	高数Ⅱ

添付図表

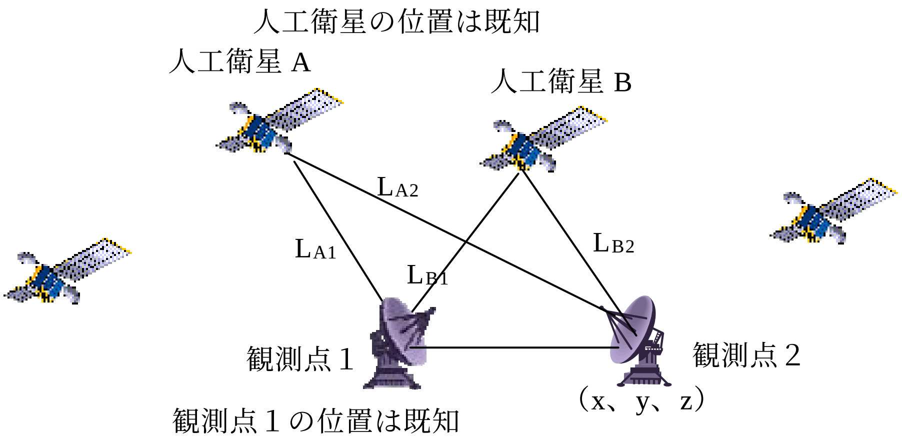


図１　GPS 技術による距離測定

人工衛星および基準点の位置座標から得られる複数の衛星-観測点間距離に関する方程式を解くことで、観測点の位置座標(x、y、z)を求めることができます。

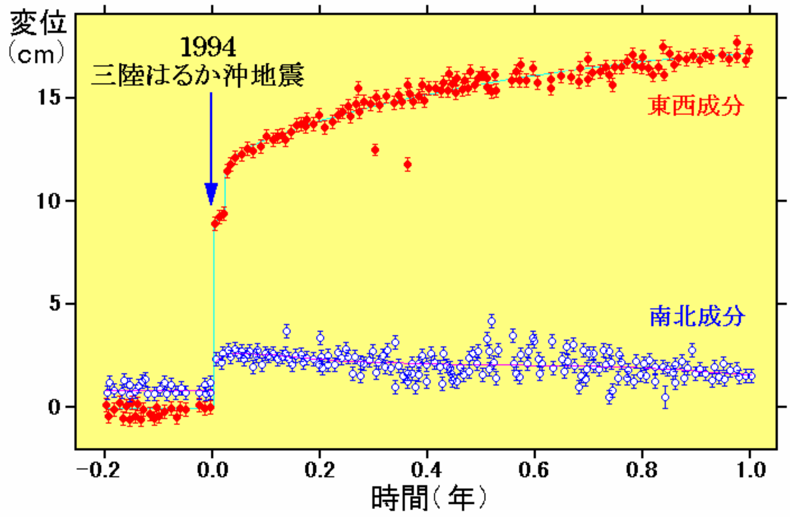


図２　GPS による地震直後の変位の検出

（出典：http://www.hinet.bosai.go.jp/about_earthquake/sec5.3.htm）

地震直後の地殻変動を GPS により捉えることができた。地震前の前兆的な地殻変動が発生する場合にはそれを捉えることで地震予知ができる可能性がある。

出典情報

土屋淳・辻宏道 (2001) 「GPS による単独測位」『新・やさしい GPS 測量』, pp.112-119, 財団法人日本測量協会

株式会社ユニゾン (2003) 「GPS のしくみ」『図解雑学 GPS のしくみ』, pp.80-115, ナツメ社

独立行政法人防災科学技術研究所（2001）「地震の基礎知識と地震の基礎知識とその観測」,以下より検索、URL：http://www.hinet.bosai.go.jp/about_earthquake/sec5.3.htm

事例シート

題材分類	高数Ⅱ

題材主題	江戸時代の技術で地図を作ってみよう
副題	便利な三角関数

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
高校数学 II	（３） いろいろな関数	ア　三角関数	（イ）三角関数とその基本的性質	

学習内容のキーワード	三角関数	活用場面のキーワード	地図、水準点、三角点

題材とその活用場面

航空写真や GPS などが無い時代から各種の地図が作られ、山の高さの測量なども行われてきました。日本地図としては江戸時代に間宮林蔵によって作られたものが有名ですが具体的にはどのようにして計るのでしょう。磁石、巻尺と分度器程度の器具で地図を作成する方法を考えてみましょう。

三角関数は既知の長さと角度から、未知の長さを知る便利な道具です。

説明

地図の書き方として、まず海岸線の形を書くことを考えてみましょう。海岸に立ち目標となる岬などのポイントの方向と距離を求めます。方向は磁石と分度器があれば求められます。距離はどうやって測ればよいでしょう。１m程度の物差しで測るのは時間がかかりそうだし、誤差も大きくなりそうです。物差しと、分度器を組み合わせれば、三角関数により、目標点までの距離を求めることができます（図 1 参照）。底辺の短い細長い三角形を考え、底辺にものさしを当て、両端から目標点を見通す角度が同じになる向きを決めます。このときの角度をθとすれば、ものさしの長さ×COSθの半分が目標までの距離です。この作業を繰り返して目標地点を海岸線の先に設定してゆけば、海岸線の形が求まります。

同じ考え方で山の高さや、ビルの高さを測る方法を考えてみましょう。ふもとと、頂上までの距離をはかり、頂上を見上げる角度を求めれば、距離と同じ考え方で、高さも求まります。

江戸時代の末期、間宮林蔵は基本的にこれと同じ方法で日本全国の海岸を歩き、日本地図を作成しました（日本独自の数学（和算）にも八線表と呼ばれる三角関数表がありました）。これは当時としては世界最高峰の高い精度を持った地図でした。当時、欧米諸国はアジアの植民地化を進めていましたが、この日本地図は欧米列強の日本進出を躊躇させる効果があったといわれています。測量技術は大砲の飛距離を決める重要な軍事技術であり（現代の GPS なども元は軍事技術です）、間宮林蔵の地図の精度から、日本の持つ潜在的な科学技術力を警戒したためだと考えられます。三角関数が幕末の日本を助けてくれたのかもしれません。

間宮林蔵の気分になって、ものさしと分度器で校舎の高さを、より正確に測る方法を工夫してみましょう。

（山田秀幸）

題材分類	高数Ⅱ

添付図表

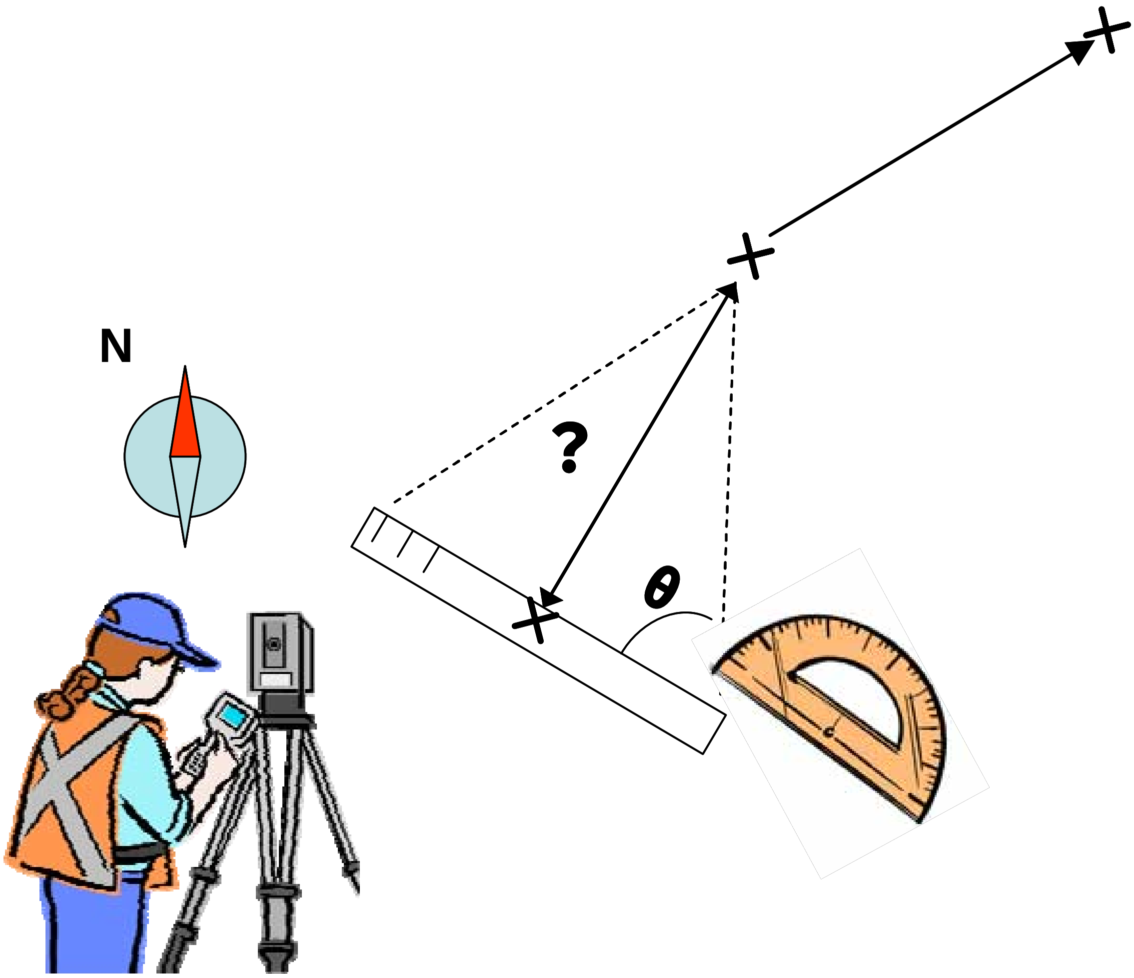


図１．ものさしと分度器による測量のイメージ

出典情報

間宮林蔵　講談社文庫　吉村 昭 (著)

事例シート

題材分類	高数Ⅱ

題材主題	**カーナビはどうやって自車の位置がわかるのか**
副題	人工衛星電波を受信して位置座標を正確に測る技術

学習指導要領の教科・科目	**学習指導要領の大項目**	**学習指導要領の中項目**	**学習指導要領の小項目**	**備考**
高校数学Ⅱ	（１）式と証明・高次方程式	イ　高次方程式	イ　高次方程式	

学習内容のキーワード	連立方程式、平方根	**活用場面のキーワード**	カーナビ、GPS、位置、座標

題材とその活用場面

皆さんの家の車にカーナビ（カーナビゲーションシステム）は付いていますか？便利ですよね。カーナビは人工衛星からの電波を受信機で受信してその位置を正確に（数十ｍ程度の精度で）測る GPS（Global Positioning System）という宇宙技術を活用しています。

カーナビでは位置情報を瞬時に求め、地図と重ね合わせることで、車の位置を地図上でリアルタイムに表示し、目的地へと車を導いているわけですが、人工衛星という宇宙技術と数学（方程式）の組み合わせるによって位置の正確な測定に役立っているのです。方程式の学習がカーナビによる正確な位置決定に活用されています。

説明

人工衛星（GPS 衛星）からの電波を受信して自分の位置を測る位置測定方法について簡単に考えてみましょう。

GPS 衛星からの電波発信時刻と受信機での受信時刻の差を測定し、それに電波速度（光速）を掛けることで衛星と受信機との距離を求めることができます。ここで、GPS 衛星の軌道は正確に把握されており、また、GPS 衛星は精度の高い原子時計を積んでいるため、人工衛星の座標と電波発信時刻は非常に正確に知ることができます。しかし、受信機側の時計はあまり正確ではないため、光速で進む電波の（発信時刻－受信時刻）を正確に求めるには受信時刻を補正する必要があります。したがって、受信機の位置座標（x、y、z）と受信機時計誤差 dt の４つの未知数を測定する必要があるわけです。今、ある人工衛星（A、B、C）と受信機の距離を L とすると、上記の通り（電波発信時刻－受信時刻）×光速 c で求めることができ、次の方程式が成り立ちます。

$$L=\sqrt{(x-A)^2+(y-B)^2+(z-C)^2}+c\times dt$$

未知な変数が m 個ある場合には、m 個以上の方程式があればそれらを連立で解くことで求めることができます。上記の場合、未知な４変数を求めるためには４つ以上の人工衛星から同時に電波を受信して、４つの方程式を解けばよいことになりますが、基本的には６つの軌道面に４個以上ずつ合計 24 個以上の GPS 衛星が配置されており、同時に４つ以上の GPS 衛星から電波を受信することが可能です。この方程式は平方根が含まれた若干複雑な構造になっているため、この４つの方程式を連立で解くのは実はそう簡単ではありませんが、数学を用いることによって４つの方程式を満たす４つの変数の最適解を理論上求めることが可能です。

人工衛星という宇宙技術と数学（方程式）を組み合わせることで、正確に位置を測定できるわけです。カーナビでは位置情報を瞬時に求め、地図と重ね合わせることで、車の位置を地図上でリアルタイムに表示し、目的地へと車を導いているのです。

なお、受信機側の時計誤差も正確に求めることができるわけですから、その誤差を補正することによって、カーナビで表示されている時計は実は日常的に使う上では他の時計よりもかなり正確であると言うこともできます。

（堤一憲）

題材分類	高数Ⅱ

添付図表

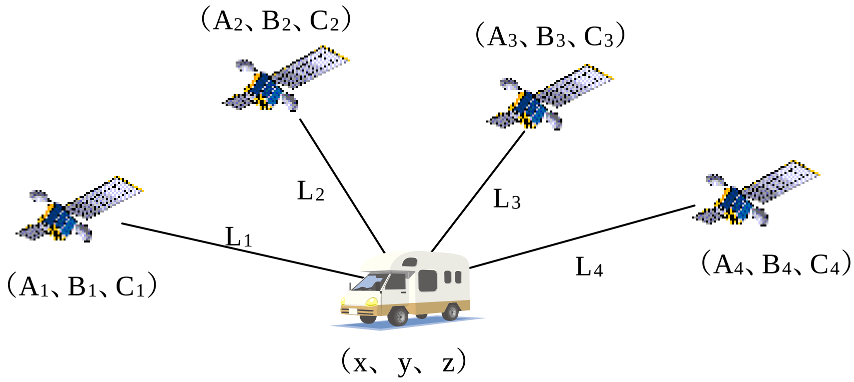


図1　GPS 技術による位置決定

自分の位置座標(x、y、z)と受信機時計誤差 dt の４つの変数を４つの方程式を解くことで求めることができます。

出典情報

土屋淳・辻宏道（2001）「GPS による単独測位」『新・やさしい GPS 測量』，pp.112-119，財団法人日本測量協会
株式会社ユニゾン（2003）「GPS のしくみ」『図解雑学 GPS のしくみ』，pp.80-115，ナツメ社

題材分類	高数Ⅱ

題材主題	常用対数ってどんな時に役立つの？
副題	大きさがものすごく異なる値の比較

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
高校数学Ⅱ	（３）いろいろな関数	イ　指数関数と対数関数	（ウ）対数関数	

学習内容のキーワード	常用対数	活用場面のキーワード	値の比較、安全管理

題材とその活用場面

常用対数は、10 を何乗したらその数になるかを表すものですが、大きさが桁違いに異なる値が幾つかあった場合にそれらを比較する時に有効です。例として安全管理の分野での活用例を挙げます。我々が死んでしまう要因はさまざまなものがあり、各要因によって我々が１年間に死んでしまう確率は大きさが随分と異なり、これらを常用対数の目盛りを使って表示すると理解が比較的容易です。このように常用対数の学習は、桁違いに大きさが異なる値の比較において活用されています。

説明

常用対数がなぜ役に立つのかは、感覚的に判り難いかもしれません。例えば、$\log_{10}10$ は 1、$\log_{10}100$ は 2 ですが、$\log_{10}3$ は 0.48、$\log_{10}0.2$ は-0.70 です。１つの例として、常用対数や常用対数目盛りを使った表現は、大きさが桁違いに異なる複数の値を比較する時に有効です。

安全管理の分野では我々人間（従業員など）が死亡する要因やその確率を分析することが重要です。各要因による我々の１年間に死亡する確率は大きさが随分と異なります。ある分析事例では、図１に示されるような大きさの確率を示しています。例えば、ある人が 1 年間に交通事故で死亡してしまう可能性は 10,000 分の 1 以上である一方で、1 年間に雷にあって死亡する確率は 1,000,000 分の 1 以下です。この 2 つの数値でも 100 倍以上大きさが異なります。図１右側では常用対数目盛りを使って表示をしていますが、このような場合に常用対数目盛りを使用しないと、図１左側のように非常にわかり難くなってしまいます。このように安全管理の分野では常用対数の概念がしばしば用いられます。

（坂尾知彦）

題材分類	高数Ⅱ

添付図表

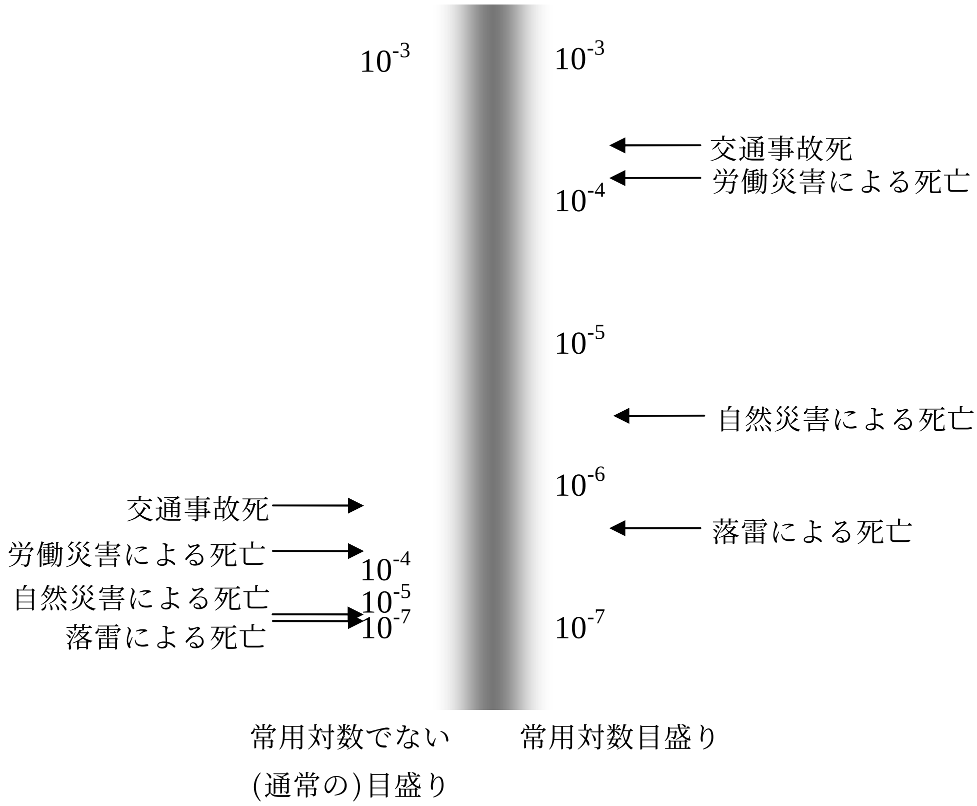


図１　我々の年間死亡確率

出典情報

酒井信介監訳、技術分野におけるリスクアセスメント、森北出版、2003

題材分類	高数Ⅱ

題材主題	度数分布と関数の機械の保全活動への応用
副題	頻度分布から得られる関数を使って故障を未然に防ぐ

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
高校数学C	（３）統計処理	イ　統計的な推測		
高校数学Ⅱ	（３）いろいろな関数	イ　指数関数と対数関数		

学習内容のキーワード	分布、度数分析	活用場面のキーワード	機械のメンテナンス、事象の発現予測

題材とその活用場面

工場の設備や機械の状態や稼動状況を維持することを保全と呼びます。保全には故障などが起きた後に対応する「事後保全」、定期的に行なう「定期保全」、故障などを未然に防ぐための「予防保全」に分類されます。保全の分野では、ある部品の開始時点からの経過時間と、その時点で故障が発生する確率の関係を表すグラフが、バスタブ曲線という名前でよく知られています。この関数を使えば、部品の故障が発生しそうな時を予め予測することが出来ます。このように、いろいろな関数が機械の保全の分野でも活用されています。

説明

ある機械部品（歯車やモーターなど）の使用開始からの経過時間を横軸に、使用期間内の各時点で故障が発生した部品の数を縦軸にとって度数分布のグラフを描くと例えば図１のようになります。横軸をそのままで縦軸をその時点で故障が発生する確率に替えると図２のようになります。図２のような形状になるのは、部品の種類によらず機械部品に概ね共通の性質であることが知られています。図２の曲線をその形状からバスタブ曲線と呼んでいます（お風呂の底の形に似ているから）。各々の期間を次のように呼びます。

(1)初期故障期間
この期間の故障は、部品製造工程での欠陥などの原因などによるものです。

(2)偶発故障期間
この期間に発生する故障の頻度はほぼ一定で、故障はランダムに発生します。

(3)摩耗故障期間
この期間に発生する故障は摩耗、疲労などによって寿命が尽きることによります。

機械が故障した場合に修理するメンテナンスエンジニアは、過去の同じ種類の部品の故障発生に関するデータをこの関数に当てはめた上で、摩耗故障期間に突入するまでの時間を知っておけば、摩耗故障期間で故障が頻発する前に部品を新品に交換するなどの対策を取ることができて、作業が効率的になります。

（坂尾知彦）

題材分類	高数Ⅱ

添付図表

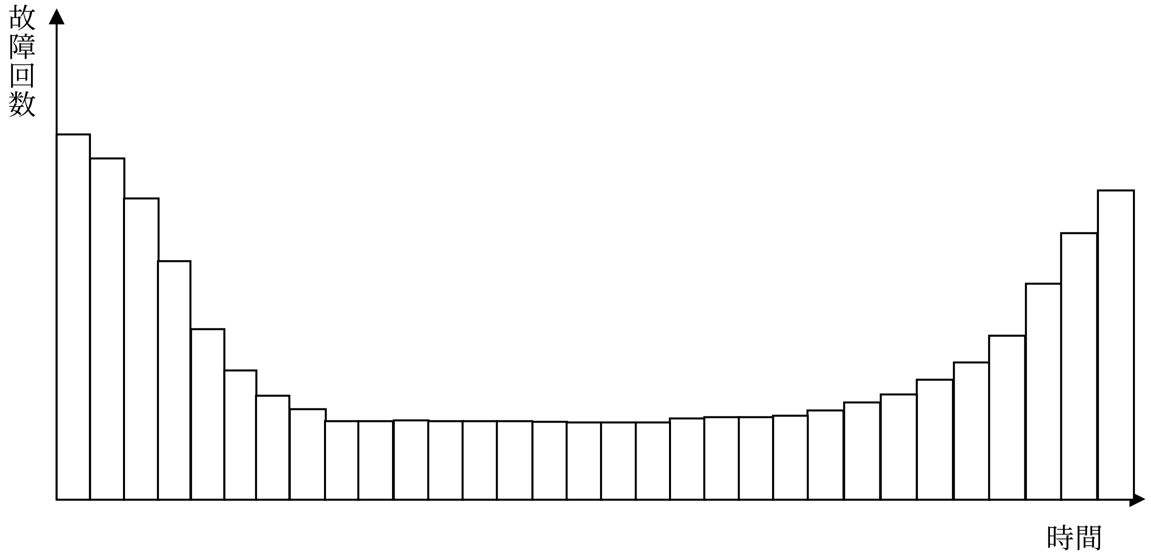


図１　故障の頻度分布

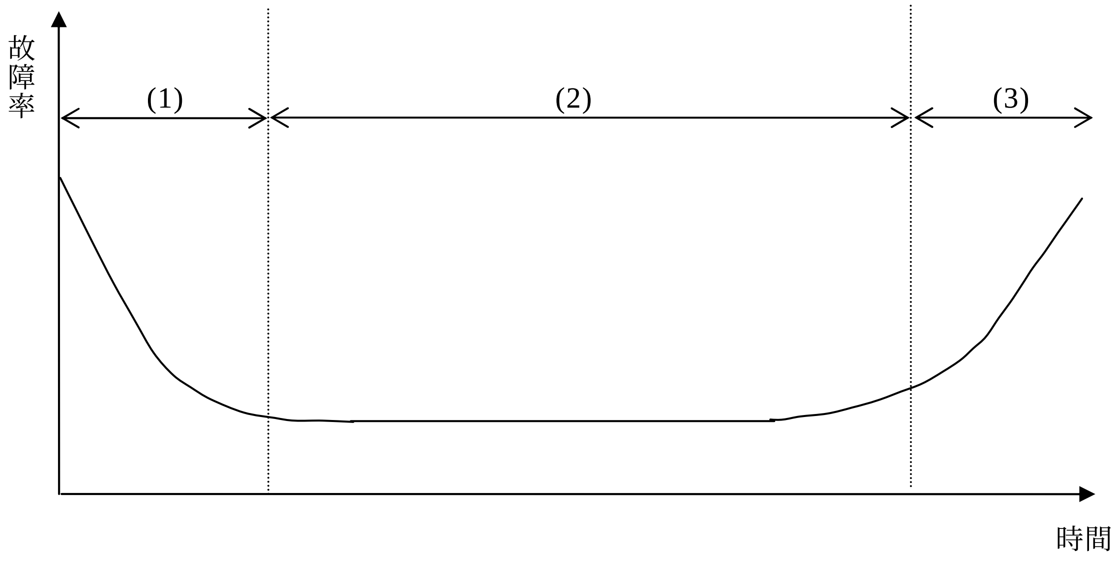


図２　バスタブ曲線

出典情報

事例シート

題材分類	高数Ⅱ

題材主題	**複素数ってどんな時に役立つの？**
副題	電気回路での利用例

学習指導要領の教科・科目	**学習指導要領の大項目**	**学習指導要領の中項目**	**学習指導要領の小項目**	**備考**
高校数学Ⅱ	（１）式と証明・高次方程式	イ　高次方程式	（ア）複素数と二次方程式	

学習内容のキーワード	複素数	**活用場面のキーワード**	電気回路、電気抵抗、コンデンサー、コイル

題材とその活用場面

二乗すると-1 になるという虚数ですが、これは一般に複素数として知られています。この複素数、学校で習うことといえば、実数部と虚数部で分けられた複素平面上での複素数のあらわし方でしょうか？複素数は、社会生活上では全く関係のないように想像できますが、実は意外なところで利用されています。電気回路、特に、交流電源にコンデンサー、コイル、抵抗をつけた回路を考えたとき、複素数を利用すれば、すっきりした形で表現することができます。複素数は電気回路を記述する場合に効果的に活用されています。

説明

虚数って不思議な数ですね。二乗すると-1 になる数であるということで、頭の中では想像するのが難しいものです。実数と虚数を合わせた数を一般に複素数と呼んでいます。複素数を視覚的にあらわすもっとも簡便な方法は複素平面だと思います。X 軸に実数部、Y 軸に虚数部をとり、二次元平面状に複素平面を考えます。実数部は虚数部は互いに 90 度ずれて交差している。この考え方が役に立つのが、電気回路なのです。

交流の電気回路の最も簡単な構成は交流電源、抵抗、コンデンサー、コイルの組み合わせです。図１にこれらを直列に配置した図を示します。これを一般に LCR 直列回路と呼んでいます。直列の場合、電流 I が一定であることから、抵抗、コンデンサー、コイルに対する電圧は、それぞれ RI、I/ωC、ωLI となります。ここで、R は抵抗、ωは交流の角速度、C はコンデンサーの容量、L はコイルのインダクタンスとします。このとき、全体の電圧はこれらの合計値ではありません。位相が異なるために単純に和をとることができません。コンデンサーは抵抗に対して 90 度位相が早く、コイルは抵抗に対して 90 度位相が遅いためです。この関係を複素数 j を用いて記述すると、全体の抵抗値は Z=R+j(ωL-1/ωC)となります。位相が 90 度早くなる、あるいは 90 度遅くなるという関係を複素数を利用してそれぞれ-j、+j と表現しています。複素数の知識がなかったとしたら、このような記述はできません。同様に、図２に示した LCR 並列回路については、抵抗、コンデンサー、コイルに流れる電流は、それぞれ V/R、ωCV、V/ωL となります。このとき、全体の電流の合計は、位相のずれがあるためにすべての和とはなりません。先ほどの場合と同様に、コンデンサーは抵抗に対して 90 度位相が早く、コイルは抵抗に対して 90 度位相が遅いという関係を利用すると、複素数の関係を利用して、全体の抵抗値は I/V=1/R+j(1/ωL-ωC)となります。このように、複素数の関係は電気回路を表現する場合に非常に役に立ちます。

（松本昌昭）

題材分類	高数Ⅱ

添付図表

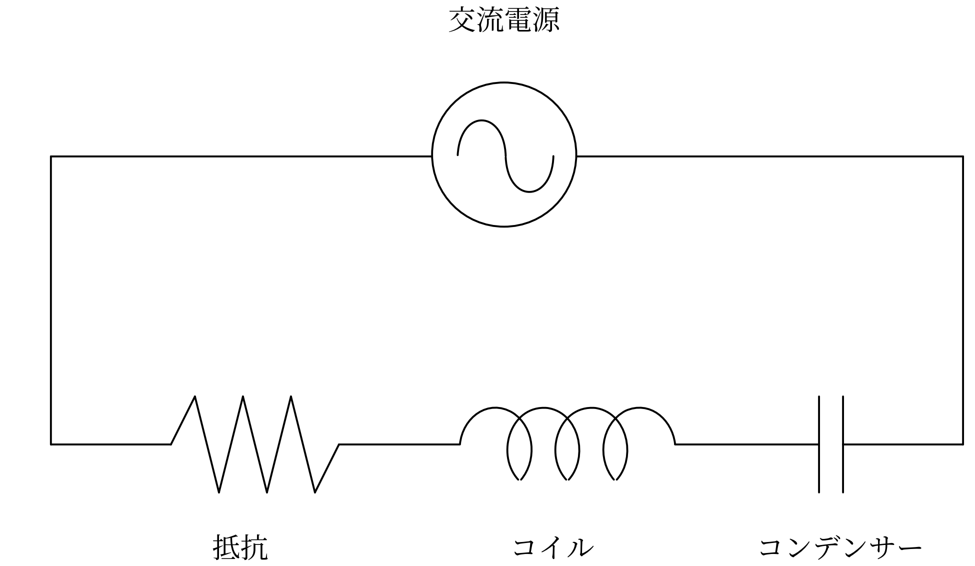


図１　LCR 直列回路

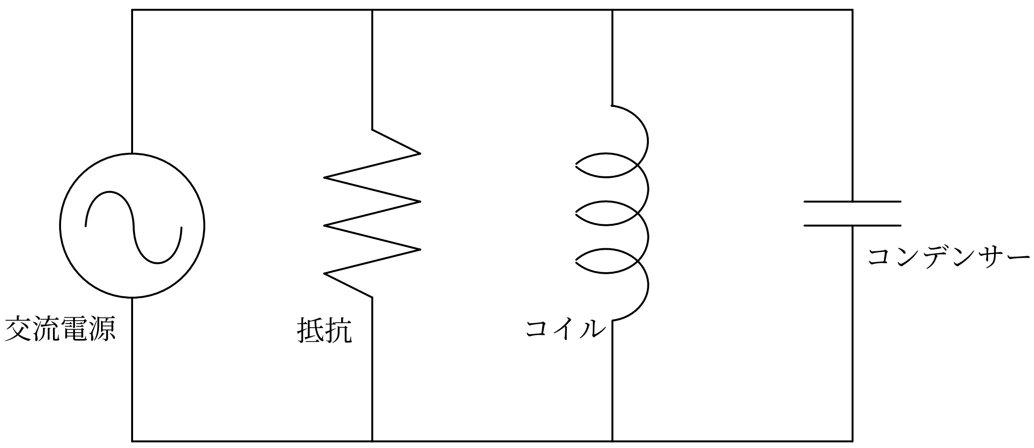


図２　LCR 並列回路

出典情報

http://laboratory.sub.jp/phy/24.html

事例シート

題材分類	高数Ⅱ

題材主題	**服の肩口は開くとどんな形？**
副題	三角関数の利用

学習指導要領の教科・科目	**学習指導要領の大項目**	**学習指導要領の中項目**	**学習指導要領の小項目**	**備考**
高校数学Ⅱ	（３）いろいろな関数	ア　三角関数	（イ）三角関数とその基本的な性質	

学習内容のキーワード	三角関数	**活用場面のキーワード**	服飾産業

題材とその活用場面

毎日着ている服、その服のなかに三角関数が使われています。肩の部分と袖の部分が分かれている服を考えてみてください。袖の部分は筒形状をしています。これを切り開いてみたら、肩口のところはどのような形になっていると思いますか？実際の形は人に合わせた形になっているので、若干違いますが、円筒を斜めに切断したものが肩口についていると考えると、この円筒を切り開いたとき、肩口の部分は三角関数になっているのです。三角関数の学習は服のデザインに役に立っているのです。

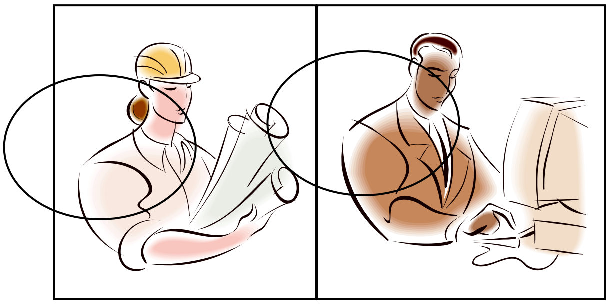
説明

毎日着ている服、簡単な作りなようで、実はかなり複雑な形状をしています。例えば胴体の肩口の部分と袖が分離している服、ワイシャツやブラウスに相当するでしょうか？の肩口のところは切り開いてみるとどのような形になっているでしょうか？説明を簡単にするために、肩口の部分は平面上にあり、袖の部分は円筒形状をしていると考えてみてください。一言でいうならば、中になにも詰まっていない円筒形状のものをななめにスパッと切ったとき、その切断面を平面状に展開するとその切り口はどのような形になるでしょうか？ということです。円筒形状のものをそのまま横に切断すると、断面は円となり、その円筒形状を展開しても切断面は直線になります。ここで想定しているように斜めに切ると、断面については想像できると思います。そうです。楕円になります。中身は詰まっていますが、キュウリ、なるとあるいは長ネギを斜めに切ったときに切り口が楕円になるのと同じことです。しかし、展開図はどのような形になるでしょうか？実は、三角関数になるのです。服の肩口は開いてみると三角関数。とっても身近なところに三角関数が隠れています。もちろん、服をデザインしている人にとっては、この事実はごくあたりまえのことなのでしょうね。

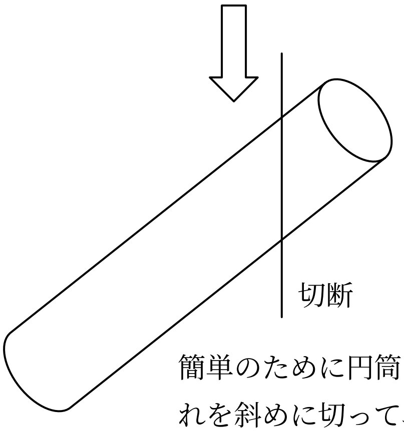
（松本昌昭）

題材分類	高数Ⅱ

添付図表



肩に袖を縫っている服の肩口の断面はどんな形？



簡単のために円筒として考える。これを斜めに切って、切り開くと・・・

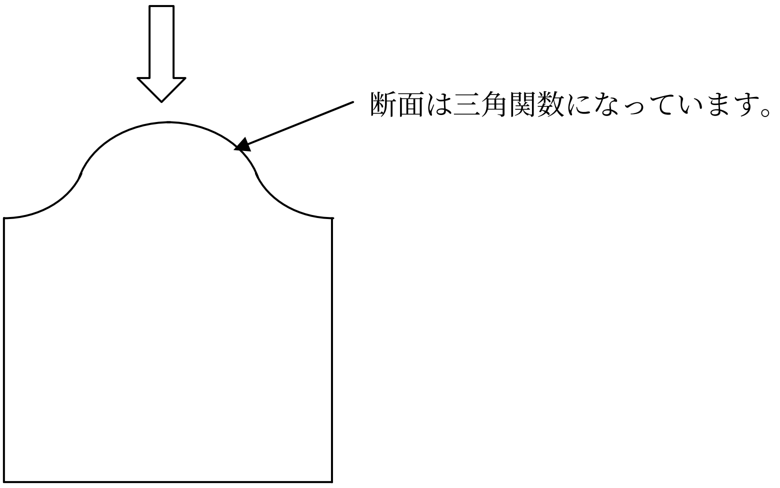


図１　袖口の形状についてのイメージ

出典情報

				題材分類	高数Ⅱ
題材主題	温度が高いと壊れやすい半導体				
副題	指数関数を利用した故障率				

学習指導要領の教科・科目	**学習指導要領の大項目**	**学習指導要領の中項目**	**学習指導要領の小項目**	**備考**
高校数学Ⅱ	（３）いろいろな関数	イ　指数関数と対数関数	（イ）指数関数	

学習内容のキーワード	指数関数	**活用場面のキーワード**	故障率、アレニウス

題材とその活用場面

半導体デバイスの寿命は電気的なもの、熱的なもの、機械的なものに依存します。とくに温度に敏感で、温度の上昇にともなう半導体デバイスの故障率はアレニウスの化学反応論がよくあてはまることが知られています。これが指数関数の形をしています。温度が上昇すると、指数的に半導体の故障率が上昇することがわかります。指数関数を理解することは、半導体の故障率の予測に役立っています。

説明

デスクトップ PC の裏には強力なファンがついており、スイッチを入れると勢いよく回転し始めます。スイッチを入れている間中、ファンは回り続けます。ファンによってデスクトップ PC の中にある半導体が冷却されます。冷却する必要があるのは、半導体自信が熱を発生するためです。もし、ファンが回転しないとどうなるでしょうか？正常に動作しなくなります。デスクトップ PC の内部の温度が上昇して、半導体が正常に動作しなくなるからです。温度が高くなればなるほど、故障率が高くなりますが、この関係を示したのが、アレニウス・モデルというもので、以下の関係で記述できます。

L＝A・exp（Ea/K･T）

ここで、L、A、Ea、K、T はそれぞれ寿命の長さ、定数、活性化エネルギー［eV］、ボルツマン定数（8.6159 $\times 10^{-5}$［eV/K］）、絶対温度［K］です。寿命の長さ（故障率）は温度に強く依存していることがわかります。この式の中にあらわれる定数 A は一般には半導体メーカにしか知りえないデータのため、一般の人が故障率を予測するためには、メーカに問い合わせる必要があります。しかし、この式から言えることは、故障率は温度に非常に敏感であるということです。

半導体はデスクトップ PC を含めてさまざまなところで利用されています。テレビ、携帯電話、電子レンジ、これらの半導体が壊れる寿命が対数関数で記述できるというのは非常に面白いことですね。

（松本昌昭）

題材分類	高数Ⅱ

添付図表

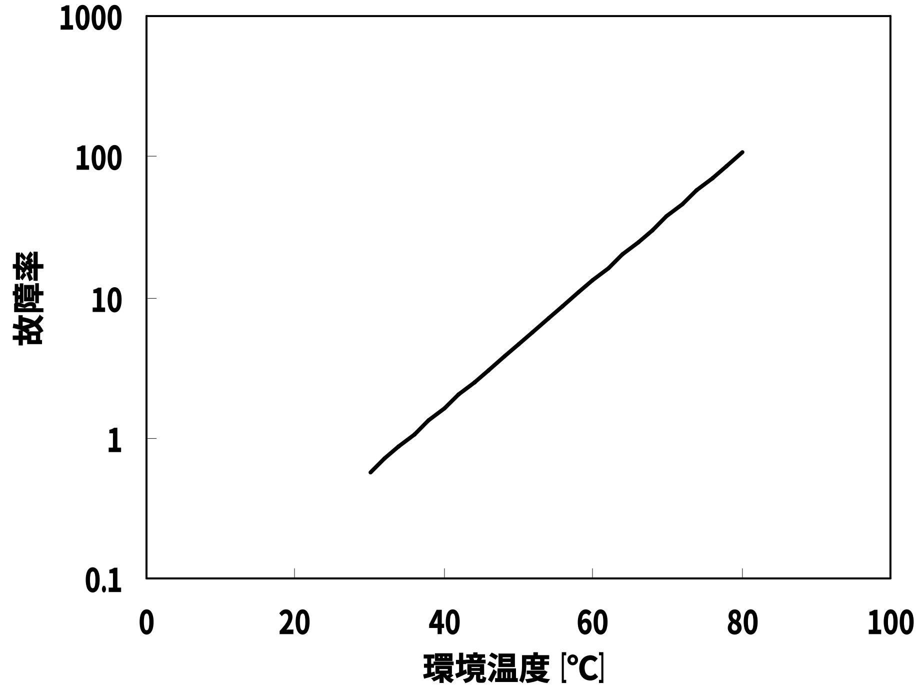


図　環境温度に対する故障率の例

出典情報

半導体　品質／信頼性ハンドブック http://www.necel.com/nesdis/image/C12769JJ2V0IF00.pdf

事例シート

題材分類	高数Ⅱ

題材主題	**減価償却**
副題	購入した品物の価値が減少していくしくみ

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
高校数学 II	（３）いろいろな関数	イ指数関数と対数関数	（イ）指数関数	

学習内容のキーワード	指数関数、比例関数	**活用場面のキーワード**	減価償却費、定額法、定率法、資産、負債

題材とその活用場面

企業が、何か物品を購入した場合、現金が減少して購入した物品が資産となります。購入した物品は少しずつ劣化して、その価値が減少していきます。物品の価値を減少させていく方法は、指数関数や比例関数によって法律で定められています。指数関数を学習することは、企業会計のしくみを理解することにも活用されています。

説明

企業が、30 万円でコンピューターを購入したり、500 万円で自動車を購入したり、1000 万円で工作機械を購入したりした場合、その分の現金がなくなる変わりに、購入した物品が資産として残ります。これらの物品は永遠に利用できるものではなく、いつかは使えなくなります。この期間は法定耐用年数として定められており、一定の比率で価値が減少していきます。このしくみを減価償却と呼びます。減価償却は、物品を購入した年と利用しつづけている期間との利益を平準化させたり、将来の設備更新のための投資費用を検討したりするために必要となります。減価償却の考え方としては、定額法や定率法などがあります。

◆　定額法

定額法は、取得価額の 90%に対して、毎年一定の比率（＝償却率α）で価値が減少していくものです。100 万円の機械を購入した場合、仮に償却率α＝0.1 であった場合には、帳簿上の機械の価値は 5 年間で表 1 のように変化します。ｎ年目の帳簿上の価値を A_n とすると、価値の減少は次のように比例関数で表されます。

$$A_1 = A_0 - A_0 \times 0.9 \times \alpha$$
$$A_2 = A_1 - A_0 \times 0.9 \times \alpha = A_0 - 2 \times A_0 \times 0.9 \times \alpha$$
$$A_3 = A_2 - A_0 \times 0.9 \times \alpha = A_0 - 3 \times A_0 \times 0.9 \times \alpha$$
$$A_n = A_0 (1 - n \times 0.9 \times \alpha)$$

◆　定率法

定率法は、未償却の残高に対して、毎年一定の比率（＝償却率β）で価値が減少していくものです。100 万円の機械を購入した場合、仮に償却率β＝0.1 であった場合には、帳簿上の機械の価値は 5 年間で表 2 のように変化します。ｎ年目の帳簿上の価値を A_n とすると、価値の減少は次のように指数関数で表されます。

$$A_1 = A_0 (1 - \beta)$$
$$A_2 = A_1 (1 - \beta) = A_0 (1 - \beta)^2$$
$$A_3 = A_2 (1 - \beta) = A_0 (1 - \beta)^3$$
$$A_n = A_0 (1 - \beta)^n$$

また、企業の貸借対照表上では、通常、機械 A の価値を直接に減少させずに、負債として減価償却累積額を計上することで資産管理が行われています（間接法）。

（丸貴徹庸）

題材分類	高数Ⅱ

添付図表

表 1 定額法による減価償却の例（100 万円の機械、償却率 0.1）

経過年数	帳簿上の価値	その年度に失われる価値（＝減価償却費）
購入時	1,000,000 円	
1 年目	910,000 円	1,000,000×0.9×0.1＝90,000 円
2 年目	820,000 円	1,000,000×0.9×0.1＝90,000 円
3 年目	730,000 円	1,000,000×0.9×0.1＝90,000 円
4 年目	640,000 円	1,000,000×0.9×0.1＝90,000 円
5 年目	550,000 円	1,000,000×0.9×0.1＝90,000 円

表 2 定率法による減価償却の例（100 万円の機械、償却率 0.1）

経過年数	帳簿上の価値	その年度に失われる価値（＝減価償却費）
購入時	1,000,000 円	
1 年目	900,000 円	1,000,000×0.1＝100,000 円
2 年目	810,000 円	900,000×0.1＝90,000 円
3 年目	729,000 円	810,000×0.1＝81,000 円
4 年目	656,100 円	729,000×0.1＝72,900 円
5 年目	590,490 円	656,100×0.1＝65,610 円

表 3　表 1 の場合の企業の貸借対照表の推移（間接法）

購入前			
資産		負債	
現金	10,000,000 円	減価償却累積額	0 円
機械 A の購入後			
資産		負債	
現金	9,000,000 円	減価償却累積額	0 円
機械 A	1,000,000 円		
機械 A 購入 5 年後			
資産		負債	
現金	9,000,000 円	減価償却累積額	450,000 円
機械 A	1,000,000 円		

出典情報

国税庁、タックスアンサー、URL:http://www.taxanswer.nta.go.jp/

国税庁、減価償却費のあらまし、2004 年 12 月 25 日以下より検索、

URL: http://www.taxanswer.nta.go.jp/2100.htm

事例シート

			題材分類	高数III

題材主題	サイクロイド曲線って役に立つ？
副題	サイクロイド曲線が最速降下曲線であることを学ぶ

学習指導要領の教科・科目	**学習指導要領の大項目**	**学習指導要領の中項目**	**学習指導要領の小項目**	**備考**
高校数学III	（３） 積分法	ア 不定積分と定積分	（ウ） いろいろな関数の積分	

学習内容のキーワード	積分、軌跡、円、サイクロイド、最速降下曲線	**活用場面のキーワード**	ボールの降下時間、滑り台、屋根の形

題材とその活用場面

円がＸ軸上を滑らずに回転したときの、円周上の１点が描く軌跡であるサイクロイド曲線が、実は「最速降下曲線」という興味深い性質をもった曲線として活用されています。

説明

図１は、円がＸ軸上を滑らずに回転したときの円周上の１点が描く軌跡であり、これはサイクロイドと呼ばれる曲線であることを学習しました。

ですから、例えば、タイヤの外周部分に電球を付けた自転車があったとして、その自転車が電球を点灯させて夜道を走行する姿を横から眺めると、その光の軌跡は、アーチ橋をいくつも並べたようなサイクロイド曲線を描きます。

このサイクロイド曲線は「最速降下曲線」という、興味深い性質をもった曲線であることが知られています。これは図２のように、ボールが重力の作用だけで、点Ａから、より低い地点Ｂまで転がる滑り台を何種類も考えたとき、点Ａから点Ｂに到る所要時間を最短にする滑り台の形を表す線は、直線でも円弧でもなく、サイクロイド曲線になるということです（このことを証明するためには、高校の学習範囲を一部超える内容が含まれますので、ここでは割愛します。）。したがって、図３のような曲線の滑り台が、ボールが降下するのに要する時間を最短にする形状であるということになるのです。

さて、この性質が利用されているとされる事例として、屋根の形状が挙げられます。例えば古いお寺の屋根には、外側に反れ曲がった形状をしているものが数多く見られますが、これは雨が降ったときに、水捌けを良くするための工夫であると考えられています。もちろん、これらの屋根の形状が厳密にサイクロイド曲線に一致するわけではありませんが、最速降下曲線としての性質が巧みに利用されているといえるでしょう。他にも、「より短時間に物体を降下させる」という必要性を様々なシチュエーションで想像しながら、自分で応用方法を考えてみるのも面白いですよ。

（瀧陽一郎）

題材分類	高数III

添付図表

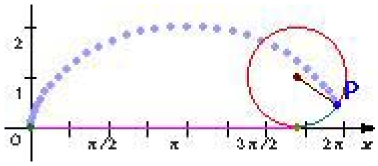


図１　サイクロイドの例

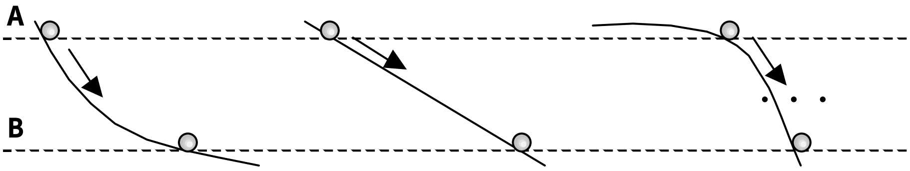


図２　様々な滑り台の形状の例

図３　最速降下曲線の例

出典情報

・Waseda Live Mathematics ホームページ
http://www.f.waseda.jp/takezawa/math/
・今野 紀雄(2002) 「微分・積分」を楽しむ本―速度メーターから桜の開化予測まで、身近な話題でやさしく理解，PHP 文庫

事例シート

題材分類	高数Ⅲ

題材主題	微分方程式ってどんな時に役立つの？
副題	環境化学での応用事例

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
高校数学Ⅲ	（２）微分法	イ　導関数の応用		

学習内容のキーワード	微分方程式	活用場面のキーワード	環境化学、運命分析

題材とその活用場面

環境中に排出された物質は、いったいどこに行くのでしょうか。このような分析は、環境化学と呼ばれる分野で「運命分析」と呼ばれています。運命分析の中では、土壌内に排出された物質の「ゆくえ」を分析することもありますが、この時、微分方程式を使う必要があります。このように、微分方程式の学習は、環境化学の分野での分析に活用されています。

説明

人間をとりまく環境に排出された物質が最終的にどうなるかを分析すること（「運命分析」と呼ばれています）は、環境の分野で重要なことです。なぜなら、その物質が人間や生物にとって有害性を有する場合には大きな問題となってしまうかも知れないからです。運命分析では、ある範囲の土壌に注目して、その土壌を１つの均質な固まりととらえた上で分析することがあります。その場合に、ある土壌に含まれている、ある注目した物質の量を知りたい場合、図１のような分析を行ないます。まず、この土壌（質量を一定値 W [t]とする）の中に入ってくる物質がある（速度を一定値 L [t/year]とする）一方で、その土壌からの流出、土壌内に含まれている気体部分からの揮発、化学反応による分解などによって、注目した土壌から無くなるもの（速度を D [t/year]とする）もあり、これらの出入りを数式で表現します。土壌内の対象物質の質量を M[t]、土壌内の対象物質の濃度を C [t/t]とすれば、t を時間として以下の式になります（ここで M、C、D が t に対して変化します）。

$$L - D = dM/dt$$

$$M = C \cdot W$$

また、D は C に比例するという性質を持っており、k を土壌中の総括的な消失速度の定数として、以下の式で表されます。

$$D / W = k \cdot C$$

以上から、次の式が導かれますが、これが微分方程式になっています。

$$dC / dt = L / W - k \cdot C$$

これを解くと、b を定数として以下の式になり、一例として図２のようなグラフになります。

$$C = \{L / (k \cdot W)\} \cdot \{1 - b \cdot \exp(-kt)\}$$

（坂尾知彦）

題材分類	高数III

添付図表

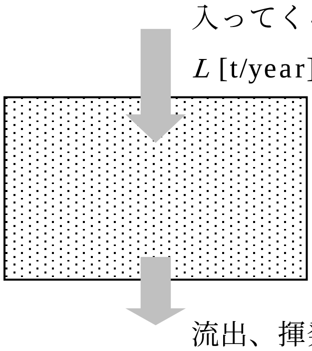


図 1　土壌中の物質の動態のモデル

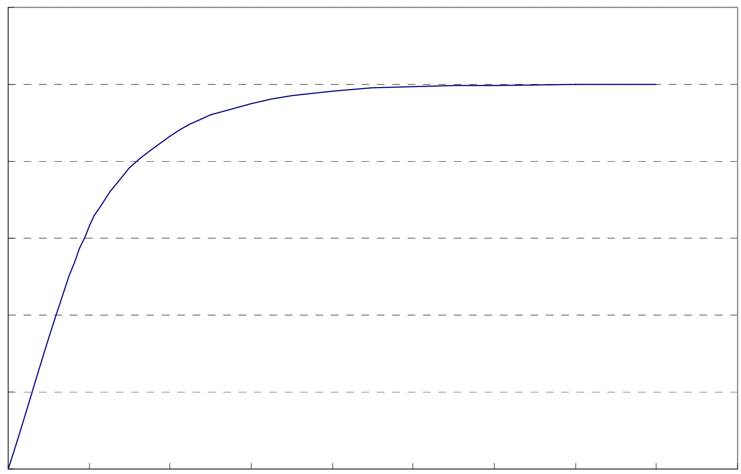


図 2　微分方程式の解をグラフに表示した一例

出典情報

独立行政法人・製品評価技術基盤機構，フタル酸エステル類リスク評価管理研究会報告書，2003 年

事例シート

			題材分類	高数Ⅲ
題材主題	**必要な時に動かない確率〜デマンド確率**			
副題	時間故障率から無次元の故障率への変換方法			
学習指導要領の教科・科目	**学習指導要領の大項目**	**学習指導要領の中項目**	**学習指導要領の小項目**	**備考**
高校数学 III	（２）微分法	イ導関数の応用		
高校数学 III	（３）積分法	ア不定積分と定積分	（ウ）いろいろな関数の積分	
学習内容のキーワード	自然対数の底、e、積分	**活用場面のキーワード**	故障、時間故障率、デマンド故障率	

題材とその活用場面

工場などでは、機械の故障の起こり易さを故障率として確率で表します。この故障率には、連続した操業時間の範囲で故障が発生する（時間故障率）ことを表すものと、何かを実行しようとしたときに実行できないといった故障を表す（デマンド故障率）ものとがあります。微積分の学習は、時間故障率からデマンド故障率へと変換し、工場の保守計画を立案することに活用されています。

説明

工場での機械は、ある確率で故障が発生します。機械 A が 10 年に 1 回故障する場合、1.0／10 年＝1.14×10^{-5}／時間のような時間故障率で表現されます。一方、安全装置 B を考える場合はどうなるでしょうか。何時発生するか分からない機械 A の故障に対して、故障が発生した時に安全装置 B の動作が必要となります。何かを実行しようとした場合に、実行できない頻度を表す確率はデマンド故障率（Pfd と表記します）と呼ばれ、時間に依存しない無次元数で表されます。（例えば、1／100 とは、100 回の動作で 1 回は正常に動作しないなど。）

安全装置 B も、機械 A と同じような部品で構成されていれば、機械 A の部品の時間故障率から、時間に依存しないデマンド故障率を導くことが必要となります。

今、機械の定期点検の間隔を T とします。これは、時間が T となる毎に部品が正常か否かを確認することによって、定期点検の時点では故障が 0 であることを確認することを意味します。機械のデマンド故障率を P、機械の時間故障率をλとすると、デマンド故障率は次のように表されます。

$$dP = -(1-P)\lambda \cdot dt \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{dP}{(1-P)} = \int -\lambda \cdot dt$$

これは、左辺：機械の故障率の増加＝右辺：今まで正常であった機械が次の微小時間にどれくらい故障するかを表します。この瞬間的な関係（微分）の式を積分することで、連続した操業状態となる次の式が導かれます。

$$\log_e(1-P) = \int_0^T -\lambda \cdot dt \qquad \Rightarrow \qquad P = 1 - e^{-\lambda T} \approx \lambda T(\lambda\text{が十分小さい時}) \quad \text{※（注）}$$

この結果、図 1 のように故障率 P が示されます。定期点検期間中のどの地点でも故障は発生すると考えられるので、平均的な値として、$\text{デマンド故障率} = \frac{1}{2}\lambda T$ が求められます。定期点検期間を短くすれば、デマンド故障率も小さくなりますね。

（丸貫徹庸）

題材分類	高数III

添付図表

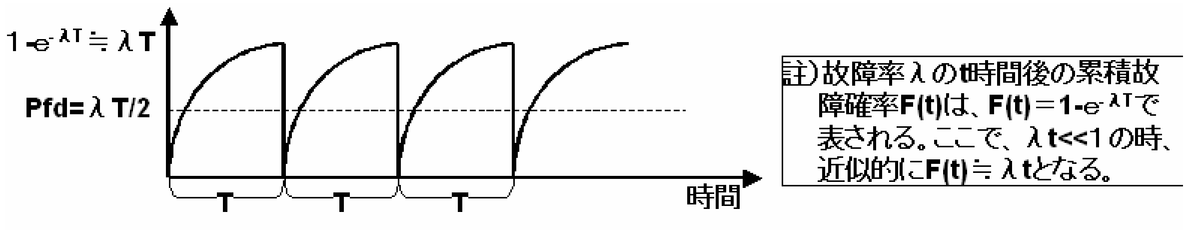


図１　定期点検期間と時間故障率の累積的な変化との関係

※（注）

ｅを底にもつ指数関数は、次のような無限級数に展開できます。

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \left(x = 1\text{の時}\right) = 2.71828\cdots\cdots\cdots$$

ここで、λが０に近い場合は、ｅ^{x}の二次の項以降は無視（ほぼ０）できるとして、$1 - e^{-\lambda x} \approx \lambda x$と一次近似されます。

出典情報

題材分類	高数Ａ

題材主題	**“ あいまいさ ”を科学する**
副題	ファジィ理論を活用した先端技術

学習指導要領の教科・科目	**学習指導要領の大項目**	**学習指導要領の中項目**	**学習指導要領の小項目**	**備考**
高校数学Ａ	（２）集合と論理	イ 命題と証明		
高校生物Ｉ	（１）生命の連続性	ア 細胞	（ア） 細胞の機能と構造	

学習内容のキーワード	神経細胞、主観、言語、知識、経験	**活用場面のキーワード**	家電製品、制御、パターン認識

題材とその活用場面

科学技術の伝統的な方法論では、対象となる現象を方程式で表し、これを解くことで現象を予測・制御していました。しかし、科学技術が複雑化すればするほど、全ての現象を数式で表現することが困難であり、それほど大きな効果が得られないことが分かってきています。そこで、従来の科学とは大きく異なる視点からアプローチする「ファジィ理論」に、最近注目が集まっています。ファジィ理論とは、人間の高度な情報処理機能をお手本として「○○ならば△△する」という、人間の主観や感覚のようなあいまいな部分を理論的に扱うものです。最近特に、家電製品などの制御分野でよく活用されています。

集合と論理に関する学習は、ファジィ理論を活用した制御技術などに活かされています。

説明

例えば“ 快適な気温 ”と一言にいっても、ある人にとっては 16～20℃であったり、ある人は 18～22℃であったり、個人の主観や感覚に応じてさまざまです。ファジィ理論では、こうした主観や言語的表現による「あいまいな部分」を理論的に扱います。ファジィ理論を活用することにより、次のようにして人間の感覚に近いシステムを構築することが可能となりました。

・ 人間の持っている知識や経験を表現してシステムに取り込む
・ 人間のパターン認識力や総合的判断力をできるだけ模擬する

日本では 1990 年代に洗濯機にファジィが応用され、ファジィ家電が広まりました。

洗濯機では、衣類をよく洗浄することが当然重要ですが、洗浄力を強くすると布の傷みが大きくなります。こうした相反する条件をクリアするために、ファジィ理論を活用した洗濯機では、次のような制御のルールを用いています。

・ もし布量が多く布質がごわごわならば、水流を強くし、洗浄時間を長くする（ジーンズをたくさん洗っているような場合に相当）
・ もし布量が少なく布質がやわらかならば、水流を弱くし、洗浄時間を短くする（ワイシャツやブラウスを少量洗っているような場合に相当）

なお、布量や布質などは洗濯機内部にセンサを設置して、推定しています。

ファジィ理論は“ もし温度が高いならば電圧を下げよ ”のように、制御のルールを言語的に表現することが可能となったため、家電製品の制御分野において特に広まっていきました。

（吉元怜毅）

題材分類	高数A

添付図表

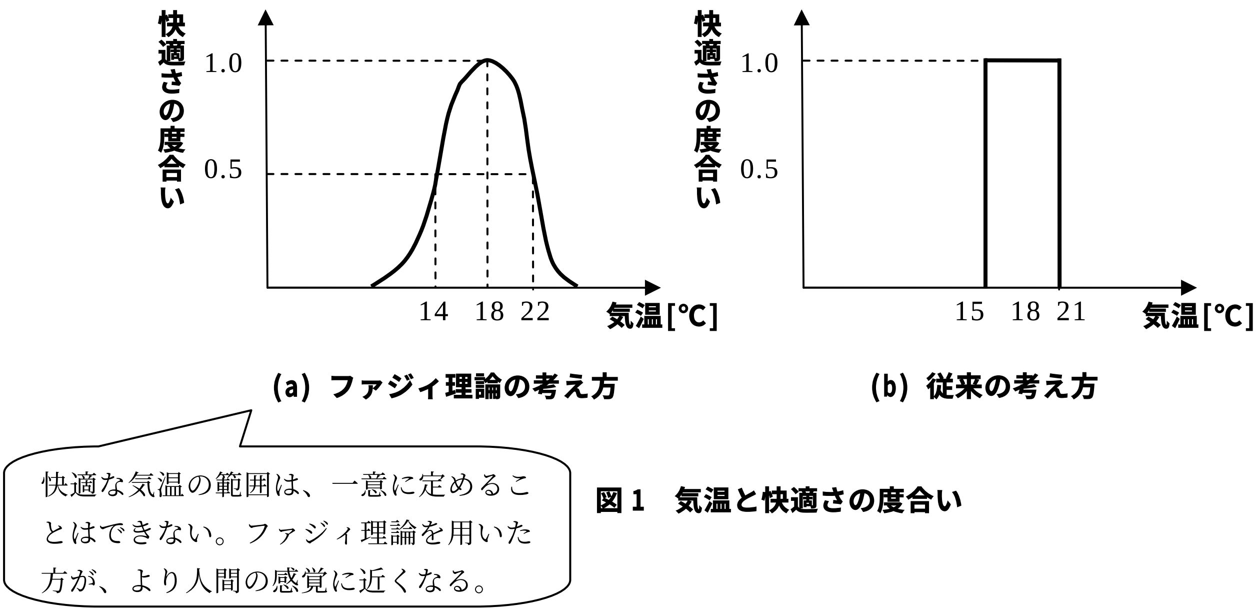


図１　気温と快適さの度合い

出典情報

萩原将文「ニューロ・ファジィ・遺伝的アルゴリズム」産業図書、p.78、p.136

題材分類	高数Ａ

題材主題	**地震時における被害を受けた建物は揺れが原因？液状化が原因？**
副題	積集合の概念と確率計算によって、複数の要因による被害重複を考慮する。

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
高校数学Ａ	（３）場合の数と確率	イ　確率とその基本的な法則		

学習内容のキーワード	積集合、確率	活用場面のキーワード	地震被害想定、建物被害、揺れ、液状化、重複

題材とその活用場面

全国の都道府県では、各地域において近い将来発生する可能性が高い地震を想定し、その地震が発生した際にどのような被害が発生するかを予測し、地震防災対策の基礎資料とする地震被害想定調査が実施されています。例えば、避難対策や住宅対策の検討のために建物被害が、医療対策の検討のために人的被害などが想定項目として挙げられます。どのような原因でそうした被害がどれだけ発生するかを地震発生前に想定しておくことで、防災対策を事前に十分検討しておこうというものです。

建物被害といってもいろいろな原因が考えられ、市街地での被害を考えた場合、揺れによって倒壊するもの、液状化によって倒壊するもの等があります。揺れによる建物被害棟数と液状化による建物被害棟数は別々に計算されるため、揺れ・液状化の両方でダブルカウントされるものが出てきます。ここでは、地震時において地域で発生する建物被害を重複がないように求める方法について、積集合及び確率計算の考え方を用いて説明します。数学の積集合・確率の学習が地震被害予測に活用されているのです。

説明

地震被害想定においては、一般市街地における建物被害の原因として、揺れそのものによるものと液状化によるものを考えます。ある地域を考えた場合、そこでの揺れによる被害確率や液状化による被害確率（ここで、被害確率＝被害棟数／全建物棟数）は、過去の地震被害事例を参考にして、その地域での揺れの大きさや液状化危険性を考慮して設定されます。建物被害には、揺れだけによる被害と液状化だけによる被害、そして揺れと液状化の両方による被害が考えられます。この状況を図示すると図１のようになり、図中の重なり合った部分（積集合）が揺れと液状化の両方による被害です。

図１の例では、ある地域に 1,000 棟の建物があった場合、揺れによる被害棟数は 700 棟、液状化による被害棟数は 200 棟と推定されます。単純に考えれば、その地域における建物被害棟数は 900 棟となりますが、これらの中には揺れと液状化の両方が原因で被害が発生した建物もあり、このままではそれらが重複された計算結果になっているのです。

そこで、揺れによる被害確率及び液状化による被害確率は地域内全域において一様に同じであると仮定すると、揺れと液状化の両方による建物被害棟数は積集合の考え方と確率計算により推定することが可能です。計算式は次式のとおりとなります。

揺れと液状化の両方による被害棟数

＝（揺れによる被害確率×液状化による被害確率）×全建物棟数

＝（0.7×0.2）×1,000 棟＝140 棟

したがって、この地域における被害棟数は 700 棟＋200 棟－140 棟＝760 棟となります。被害が甚大になればなるほど、いろいろな要因が重なり合って重複部分が増えてくるので、こうした点を考慮しながら地震被害は予測されています。

（堤一憲）

題材分類	高数Ａ

添付図表

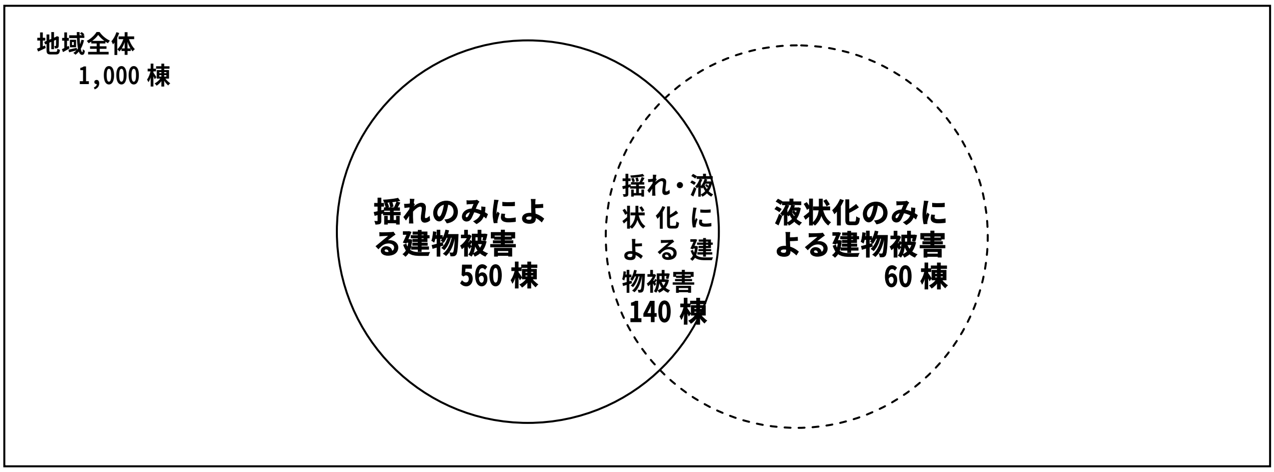


図1　地震時における建物被害の原因別発生イメージ

地域全体の建物棟数が 1,000 棟、揺れによる被害確率が 70%、液状化による被害確率が 20%であった場合、揺れによる被害棟数は 0.7×1,000 棟＝700 棟、液状化による被害棟数は 0.2×1,000 棟＝200 棟です。しかし、これらには揺れと液状化の両方で被害を受ける建物が含まれ、これは確率的に 0.7×0.2×1,000 棟＝140 棟と算出されます。

出典情報

静岡県 (2001) 「地震動・液状化による建物被害」『第３次地震被害想定結果』, pp.76, 静岡県

題材分類	高数Ａ

題材主題	**シナリオ分析で確率を明らかにする**
副題	事故の発生確率分析による安全性評価活動

学習指導要領の教科・科目	**学習指導要領の大項目**	**学習指導要領の中項目**	**学習指導要領の小項目**	**備考**
高校数学Ａ	（３）場合の和と確率	イ確率とその基本的な法則		

学習内容のキーワード	確率、和集合、積集合、背反事象	**活用場面のキーワード**	フォールト・ツリー、シナリオ分析、発生確率

題材とその活用場面

機械が故障して生産が停止する、工場で火災が発生する、このように起こるかどうか分からない不確実なことは、どのくらい起こりやすいのかといった発生確率を評価することで、事態の深刻さを見極めます。このとき「なぜ、このようなことが起こるのか？」といった原因を解明するために、要因を書き下して図式化するフォールト・ツリー（Fault Tree：FT）解析という手法があります。漠然とした現象の発生確率は分からなくとも、一つ一つ原因を丹念に調べていくことで、発生確率が分かります。確率の学習は、安全を評価することに活用されています。

説明

フォールト・ツリー（FT）とはどのようなものでしょうか。図１に恋人と喧嘩する原因を表す FT を書いてみます。きっと、原因があなたにある場合と相手にある場合とがあるはずです。あなたに原因がある場合は、遅刻をしたり、借りたものを返さなかったり、二人の記念日を忘れたりすることがあるでしょう。借りた物を忘れるとは、物を借りるということがあって、そのときに返すのを忘れてしまうということです。

このように、シナリオは「あるいは」で場合分けされるときと「同時に」起こることの組み合わせで成り立ちます。「あるいは」は和集合、「同時に」は積集合になりますね。

1　遅刻する（一ヶ月に一度は遅刻しているなぁ、1／1ヶ月、時間確率）
2　物を借りる（一週間に一度は何かを借りているなぁ、1／1週間＝4／1ヶ月、時間確率）
3　返すのを忘れる（“何かを借りると”５回に一回は返すのを忘れちゃうなぁ、1／5、デマンド確率）
4　二人の記念日（一年に７日あるなぁ、7／1年＝7／12ヶ月、時間確率）
5　記念日を覚えていない（“大切な日があると”３回に一回は忘れちゃうなぁ、1／3、デマンド確率）

デマンド確率とは、何かが起きたことを前提としたときの条件付確率のことです。
これを集合で表すと次のようになります。

{遅刻する∪（物を借りる∩返すのを忘れる）∪（二人の記念日∩記念日を覚えていない）}

恋人と喧嘩する確率で、「あなたに原因がある」確率は図 2 のように一ヶ月あたり 1.96 回はあるようですよ。

さてここで、積集合では確率は掛け算で求まります。和集合の時は、背反事象を考えなければいけません。あなたに原因がある場合は、「遅刻し“ない”、借りた物を忘れ“ない”、記念日を忘れ“ない”」、この全てが“満たされない”確率を求めなければなりませんね。

$$\left(1-\frac{(30-1)}{30}\times\frac{\left(30-4/5\right)}{30}\times\frac{\left(30-7/36\right)}{30}\right)\times 30=1.96／一ヶ月$$

（丸貫徹庸）

題材分類	高数A

添付図表

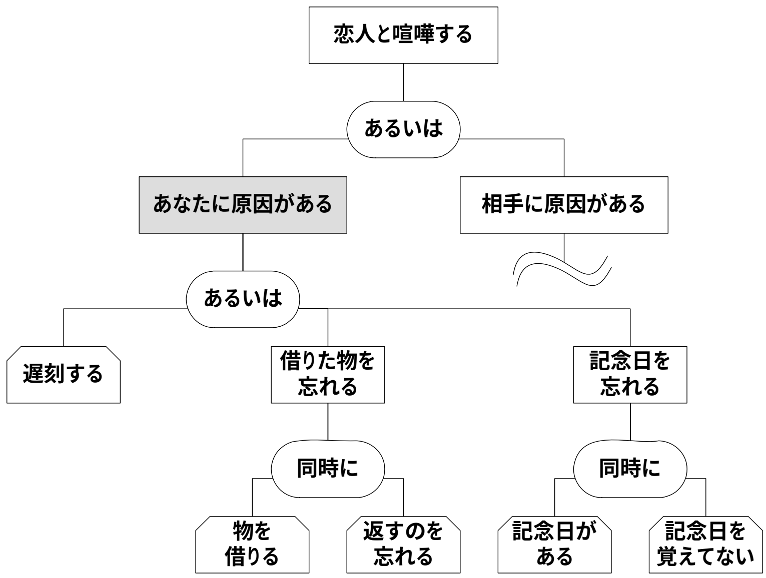


図1　恋人と喧嘩をする確率のフォールト・ツリーの一部分

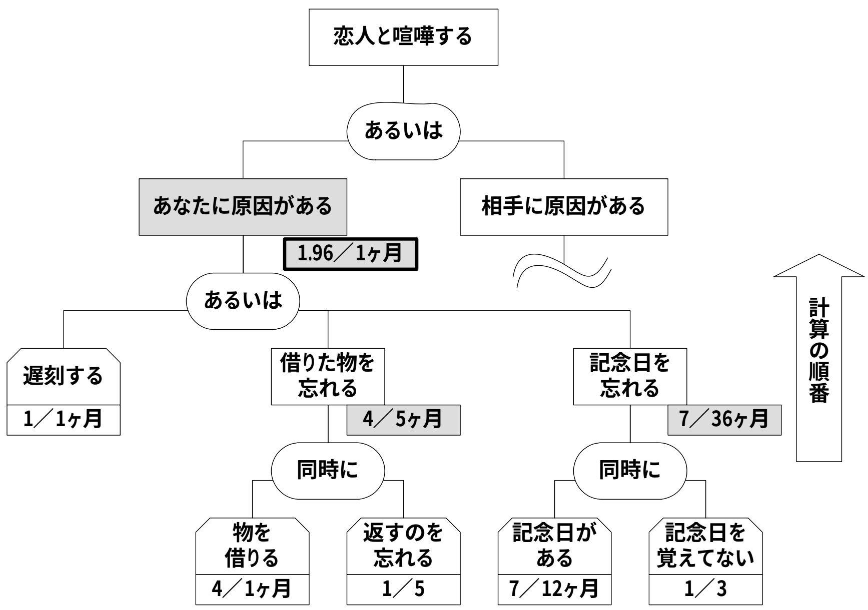


図2　恋人と喧嘩をする確率のフォールト・ツリーの一部分［確率付き］

出典情報

事例シート

題材分類	高数Ｂ

題材主題	金属材料の切削加工
副題	数値制御工作機械による切削加工プロセスの自動化

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
高校数学Ｂ	（２）ベクトル	イ　空間座標とベクトル	空間座標、空間におけるベクトル	
高校物理Ｉ	（３）運動とエネルギー	ア 物体の運動	（ア）日常に起こる物体の運動	

学習内容のキーワード	ベクトル、物体の運動	活用場面のキーワード	金属材料の切削加工、数値制御工作機械

題材とその活用場面

わたしたちの身の回りにある機器や装置を作り出す上で、金属材料の切削加工技術は非常に重要な役割を果たしています。一方、最近では各工場で熟練した技能者が減少しており、切削加工プロセスを自動化しようとする動きが高まっています。

数値制御による切削加工を可能とした NC 工作機械を動かすために、切削するのに必要な力、角度、刃を動かす速度など、さまざまなパラメータが設定されます。

力やベクトルに関する学習は、金属材料の切削加工に生かされています。

説明

わたしたちの身の回りにある機器や装置を作り出す上で、金属材料の切削加工技術は非常に重要な役割を果たしています。一方、最近では各工場で熟練した技能者が減少しており、切削加工プロセスを自動化しようとする動きが高まっています。

1952 年に米国において、数値制御（NC: Numerical Control）工作機械が開発されました。これにより高能率かつ高精度での加工が可能となり、生産工場において不可欠なものとなりました。NC 工作機械は、プログラミング言語を通じて、人間の希望通りに動かすことができます。

金属材料が切削工具によって削り取られていくメカニズムは、図１のように、何枚ものカードが切削工具の作用によって滑るモデルで表現されます。1 つの直線切刃を持つ切削工具を、切刃と直角方向に運動させて切削する場合を、2 次元切削といいます。2 次元切削の場合、材料の変形の様子や力のベクトルを、切刃と直角な平面内で考えることができ、切削プロセスを単純化することができます。

材料を切削するためには、切り屑を生成するのに必要なせん断力を加える必要があります。加工誤差を押さえるためには、工具と材料の間に発生する抵抗力、切削により発生する熱変形などを考慮する必要があります。切削抵抗力のベクトルを計算しながら、切削工具を動かす速度 V、切削厚み h、材料と切刃の角度 γ、せん断角 ϕ などのパラメータを適切に設定していきます。

（吉元怜毅）

題材分類	高数Ｂ

添付図表

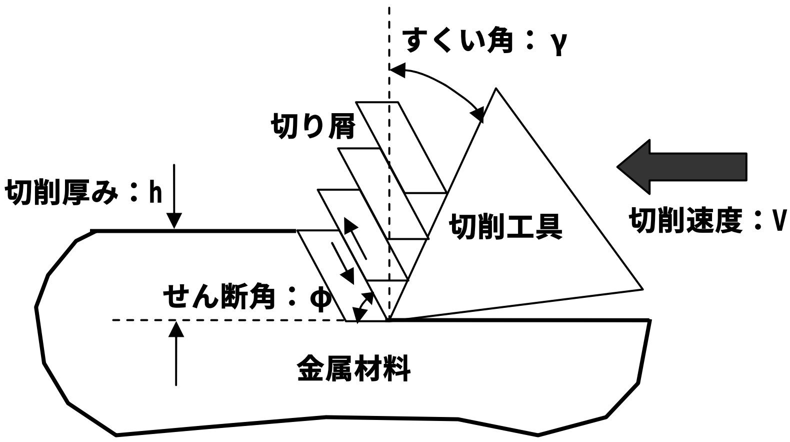


図１　金属材料の２次元切削プロセス

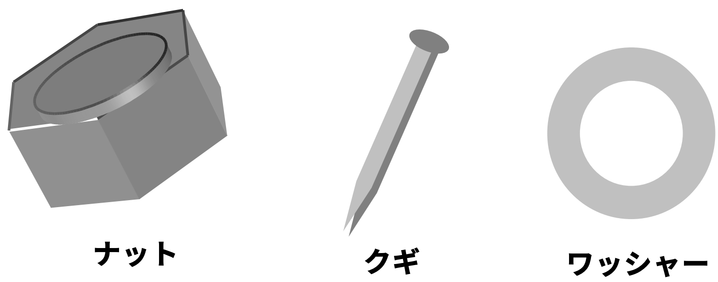


図２　切削加工された材料（例）

出典情報

事例シート

題材分類	高数Ｂ

題材主題	**ゲームキャラクターの振り付け**
副題	人の動きを割り付ける

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
高校数学 B	（2）ベクトル	ア 平面上のベクトル	(イ)ベクトルの内積	

学習内容のキーワード	ベクトルの内積、三角関数	**活用場面のキーワード**	モーションキャプチャー アニメーションキャラクター

題材とその活用場面

格闘系のテレビゲームなどでは、キャラクターの複雑な動作がリアルに表現されています。こうした動作表現の多くは、実際の格闘家の動きを 3 次元計測器で記録し、それをキャラクターに割り当てています。この動作の表現には多数の関節角度の算出がおこなわれます。ここにはベクトルの内積計算の学習が生かされています。

説明

格闘系のテレビゲームなどでは、遊ぶ人の操作に合わせてキャラクターが動き回り、複雑な動作がリアルに表現されます。こうした動作表現の多くは、実際の格闘家の動きを 3 次元計測（モーションキャプチャー）したデータを利用して作られています。

人間動作の 3 次元計測には様々な方法がありますが、動作する人の主な関節部位（手首、肘、肩・・・）にマーカと呼ばれる目印をつけ、複数のカメラで撮影した画像のデータから各マーカの 3 次元座標を算出する方法が代表的な手法です。マーカの 3 次元の座標（縦、横、高さ）を得るには複数台のカメラが必要ですが、人間のとる姿勢によってはマーカが体の影になって撮影できなくなりますので通常 5 台から 10 台のカメラが使用されます。

撮影対象の人間とゲームのキャラクターが全く同じ体型でよければ、このマーカの座標をそのままキャラクターの体型データに対して定義すれば、姿勢・動作を再現できます。しかし、ゲームキャラクタは格好良くデフォルメされた体型や、怪獣のような体型など、データを取得した人間の体型とは大きく異なる場合が少なくありません。こうした場合にはマーカの座標値から各関節の角度を算出し、この関節角度をゲームキャラクタの体型に定義して、姿勢・動作を再現します。

座標値から関節角度を算出するにはベクトルの内積計算と逆三角関数を使います。例えば肘の角度は、肘と肩のマーカ位置から上腕のベクトルつくり、同様に肘と手首のマーカ位置から前腕のベクトルをつくり、2 つのベクトルの内積から算出します。

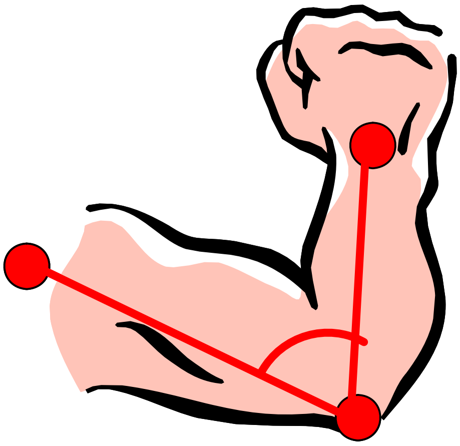
上腕ベクトル（肘から肩）：$\vec{A}$ =（ax,ay,az）
前腕ベクトル（肘から肩）：$\vec{B}$ = （bx,by,bz）

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |A| \times |B| \times \cos\theta$$

こうした計算を繰り返して、各時刻の全身の関節角度を算出し、それをキャラクターの体型に与えると、元の人間と同じような動きを再現させることができるのです。

（山田秀幸）

題材分類	高数Ｂ

添付図表
 図
出典情報

事例シート

			題材分類	高数Ｂ
題材主題	**コンピュータで天気予報**			
副題	実社会で利用されるコンピュータによる数値計算の例			
学習指導要領の教科・科目	**学習指導要領の大項目**	**学習指導要領の中項目**	**学習指導要領の小項目**	**備考**
高校数学Ｂ	（４）数値計算とコンピュータ	ア　簡単なプログラム		

学習内容のキーワード	数値計算、コンピュータ、天気予報	**活用場面のキーワード**	数値計算、コンピュータ、天気予報

題材とその活用場面

コンピュータを利用した数値計算の身近な例として天気予報があります。コンピュータを利用して天気の予測を行う場合、現状で得られるデータをコンピュータに読み込ませ、物理法則に基づいた数値計算を行い、物理現象を詳細に模擬することが必要です。どんなに複雑なシミュレーションであっても、あるアルゴリズムにしたがった法則に則り、計算が行われます。コンピュータによる数値計算の学習は、天気の予測向上に活用されています。

説明

天気予報で、今日の天気は晴れ、曇りなどテレビで確認することが多いかと思いますが、天気がどのように変化していくのか、ということの予測の一部にはコンピュータシミュレーションが用いられています。天気予報は、最終的には天気予報を行う人が他の手段によって得られる情報や経験によって総合的に判断されていますが、近年、シミュレーションによる天気の予測の精度は飛躍的に上昇していると聞きます。

天気予報のシミュレーションの方法としては、緯度方向、経度方向、高さ方向にそれぞれメッシュと呼ばれる計算領域を設定します。計算領域はメッシュによって分割されており、その分割の数が大きいほど天気予報の予測精度は高くなりますが、そのぶん計算に時間がかかってしまいます。また、計算を行うためにはモデルと呼ばれるアルゴリズムがあります。天気予報の場合には、風の速度、温度、湿度等を利用して計算されます。流れのモデルはナビエ・ストークス方程式という方程式を解くためのモデルが用いられています。メッシュ上に定義されたデータに対してモデルを適用することにより、微小な時間変化に対するデータの更新を行います。データの更新を次々と繰り返していくことによってメッシュ上のデータが変化し、天気の予測を行うことができます。

コンピュータを利用した数値計算による天気の予測というのは、データとそのデータを処理するためのアルゴリズムによって実行され、アルゴリズムによって得られた結果データを処理することによって行われます。

（松本昌昭）

題材分類	高数Ｂ

添付図表

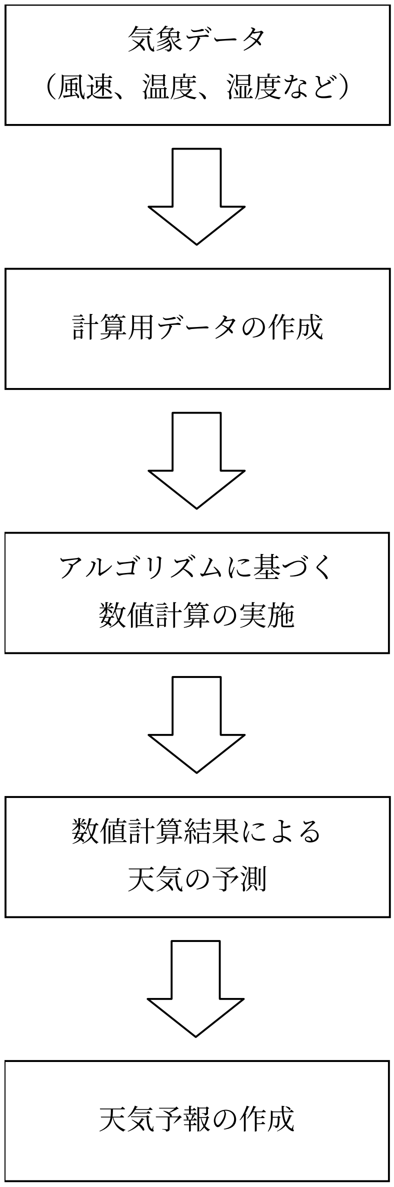


図１　数値計算の援用による天気予報の流れ

出典情報

事例シート

題材分類	高数Ｂ

題材主題	**コンピュータによるベクトルの可視化**
副題	コンピュータシミュレーションで多用されるベクトル量

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
高校数学Ｂ	（２）ベクトル	イ　空間座標とベクトル		

学習内容のキーワード	ベクトル、空間座標	**活用場面のキーワード**	コンピュータ、シミュレーション

題材とその活用場面

ベクトルがものづくりの設計現場で多用されており、ものの変形、流れの様子、電磁場の状態の把握などさまざまな場面であたりまえに利用されています。これは、ベクトル量などを把握するための可視化技術が IT の進歩にともない飛躍的に向上しているためです。ベクトル量を可視化した例を表示することで、ベクトルに対する理解を深め、親しみのもてるものとしての活用を期待します。ベクトルの学習は、設計現場において非常に多く活用されています。

説明

数学で学習するベクトルというものはものづくりや設計の現場ではあたりまえのように活用されています。ベクトルとは方向と大きさを持った量として定義されており、大きさだけの量を持つスカラーと対比されるものです。物理的な現象にはベクトルとしての性質をもつものが多いです。ものづくりや設計の現場では、コンピュータシミュレーションによる設計の評価がおこなわれており、設計段階からの評価が非常に重要となっています。コンピュータ上で評価を行うといっても、評価を行うのは人間であり、人に対して理解を促進させるための可視化が重要となっています。

可視化によってコンピュータの画面上にあたかも設計対象そのものが存在し、設計の変更や追加によってどのような状態になっているかを容易に把握することが出来ます。その可視化の際に、ベクトル量を表示させることができます。ベクトル量の代表的なものとしては、例えばものの変形量、空気の流れ、磁場や電場などさまざまなものがあります。ベクトル量を可視化することで、物理現象を直感的に理解することができます。

（松本昌昭）

題材分類	高数Ｂ

添付図表

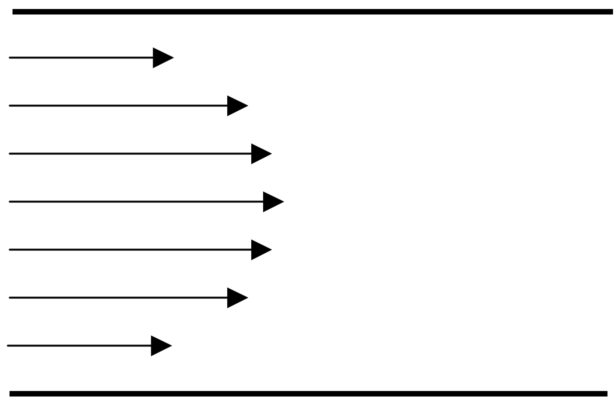


図１　平行平板間を流れる水の様子をあらわしたベクトルの例

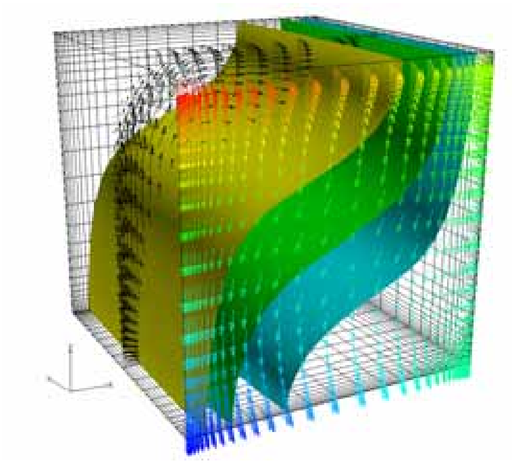


図１　可視化された等値面やベクトルの例

出典情報

事例シート

題材分類	高数Ｂ

題材主題	分散ってどんな場面で役に立つの？
副題	製品の品質管理に不可欠な分散という概念

学習指導要領の教科・科目	**学習指導要領の大項目**	**学習指導要領の中項目**	**学習指導要領の小項目**	**備考**
高校数学Ｂ	（４）統計とコンピュータ			

学習内容のキーワード	統計分析、分散、標準偏差	**活用場面のキーワード**	品質管理、工業製品

題材とその活用場面

統計を学ぶ上で非常に重要な概念である分散は、製造業が行なっている製品の品質管理に不可欠な概念です。分散は母集団のばらつきの大きさを表すからです。品質管理とは量産される製品が一定の品質の範囲内に収まるように管理することで、全ての製造業者が顧客に届ける製品について行わなければならないものです。品質管理という分野において、分散という概念は、平均とは別に有効に活用されています。

説明

製造業では通常同じ製品を多数造ります。同じ種類の製品であっても、寸法などが完全に同一の製品を造るのは現実的にはほぼ不可能です。そこで、同じ種類の製品であれば、例えば寸法が一定の範囲内に収まっていることを製造業者は顧客に通常保障します。一般に、顧客の要求に合致する製品やサービスを、最も経済的なレベルで提供するために行う活動を品質管理と呼びますが、この定義の前者、つまり顧客の要求への合致に関わることがらです。

板状の鋼材を製造する業者の品質管理を例に挙げてみましょう。顧客には厚さを 100[㎜]にして欲しいと言われているとします。製造ラインを組んで試しに鋼材を造り、試作品の厚さを測定してグラフに描くと、図１の細線のようになりました。この場合、平均値は確かに 100[㎜]でしたが、標準偏差が 20[㎜]もあったのです。これでは不良品が多すぎで顧客に届けられる板が少な過ぎます。そこで、製造ラインに改良を加えて再び試したところ、図１の太線のようになりました。平均値は 100[㎜]のままで、標準偏差が 10[㎜]にまで減らすことが出来たのです。これで顧客に鉄板を届けるための量産製造ラインの構築に目処が付きました。この場合では、分散が製造ラインの性能を評価するのに用いられています。

以上のように品質管理の分野では、製品の特性値の分散が、平均値に勝るとも劣らず、非常に重要な役割を果たしています。

（坂尾知彦）

題材分類	高数Ｂ

添付図表

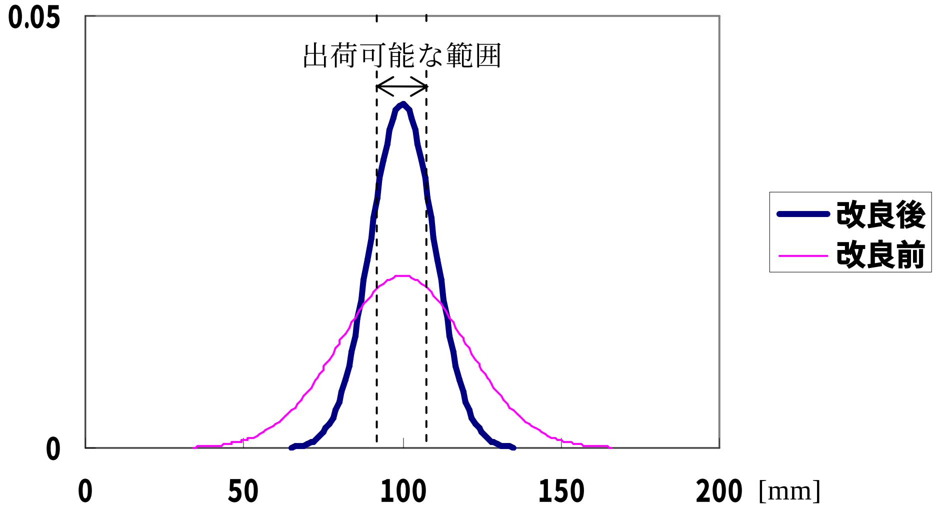


図１　製造ラインの改良前後の製品の厚さの分布

出典情報

題材分類	高数Ｂ

題材主題	ベクトルと文字認識
副題	ベクトルの概念を拡張して文字認識に利用する

学習指導要領の教科・科目	**学習指導要領の大項目**	**学習指導要領の中項目**	**学習指導要領の小項目**	**備考**
高校数学Ｂ	（２）　ベクトル	ア　平面上のベクトル	（イ）　ベクトルの内積	発展的学習

学習内容のキーワード	ベクトル、内積	**活用場面のキーワード**	パターンマッチング、類似度、パターン認識、文字認識

題材とその活用場面

パターン（模様）をベクトルとして表現することにより、図柄や文字の認識やパターンマッチングの基礎技術が実現されています。

説明

いま、下の図 1,2 のように灰色または白色のマスの列からなる 2 種類の模様 A,B を考えてみます。このとき、2 つの模様が“どのくらい似ているか？”を数値化したい場合、例として次のような考え方が用いられます。

まず、模様 A、B の各マスを左から順に、A1,A2,…,A6、B1,B2,…,B6 と名前を付けます。次に、図 3 のように A1 と B1、A2 と B2、…、A6 と B6 の各マスのペアについて色を比較します。このとき、2 つのマスの色が同じ場合は１点、違う場合は０点として、A1 と B1、…、A6 と B6 の全ペアを点数付けし、その点数を合計すると、次のようになります。（“*”印は、上記の点数付けの演算を示すものとします。）

合計点数＝A1*B1 + A2*B2 + A3*B3 + A4*B4 + A5*B5 + A6*B6　（計算式①）
＝0（灰*白）+1（灰*灰）+0（白*灰）+0（白*灰）+1（灰*灰）+0（灰*白）
＝2

よって、模様 A と B は、上記の採点方法に従えば 2 点となります。なお、模様 A 同士（または模様 B 同士）で同じ計算をすると、全てのマスの色が同じですから、1+1+1+1+1+1=6 より、満点の 6 点となります。つまり、２つの模様が近いほど、点数が高いということになるのです。

それでは次に、A,B のような模様を、図 4(a)のように複数段に並べた模様を考えてみましょう。これは、図 4（b）（数字の“８”）と図 4（c）（数字の“１”）のどちらの模様により近いといえるでしょうか？これについても、(a)と(b)、または、(a)と(c)の１段目同士、2 段目同士、…というペアについて、上述したように計算すればよいのです。この結果、(a)は(b)に近いと計算されるため、(a)の模様は「数字の“８”ではないか。」と推測されるのです。このような原理は、手書きの文字などを、白色とそれ以外の色（黒色など）からなる点の集合としてコンピュータに読み込んで、それが何の文字であるかを識別する「文字認識」の最も簡単な原理として利用されています。

ところで「内積」とは、２つのベクトルがなす角の関数であり、なす角が 0 度の場合に内積は最大、なす角が 180 度の場合に最小となります。このことから内積とは２つのベクトルの“向きの近さ”を表す指標であるといえます。

一方、成分が $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$ となる２つのベクトルを考えると、その内積は $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ で定義できますが、これは上の計算式①にかたちが似ていると思いませんか？内積とは 2 つのベクトルの向きの近さを表す量であるといえますが、“模様の近さ”を表現する計算にもそのかたちが見出されるのです。

（瀧陽一郎）

題材分類	高数Ｂ

添付図表

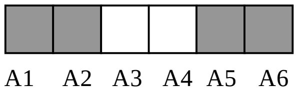


図１　模様Ａ

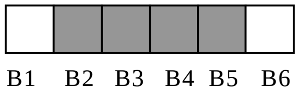


図２　模様Ｂ

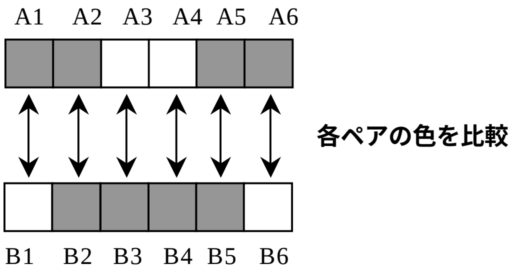
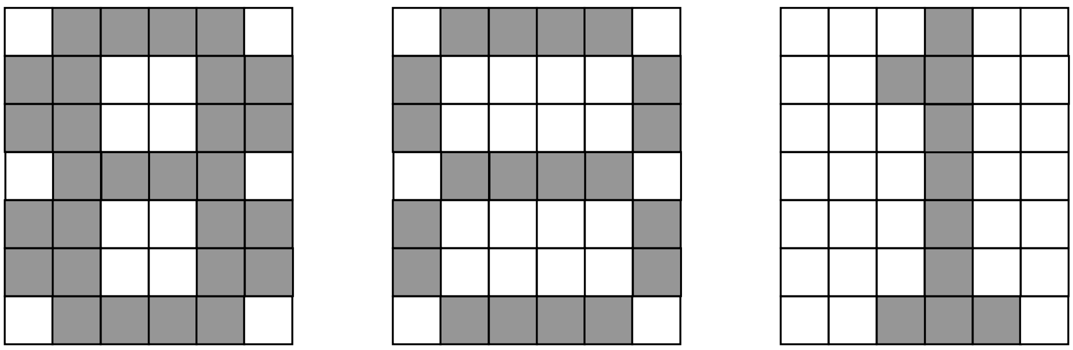


図３　模様Ａと模様Ｂとの比較



(a)　(b)　(c)

図４　文字認識の例

出典情報

特になし

題材分類	高数Ｂ

題材主題	内積って役立つ！
副題	品質機能展開という品質管理分野の手法での活用

学習指導要領の教科・科目	**学習指導要領の大項目**	**学習指導要領の中項目**	**学習指導要領の小項目**	**備考**
高校数学Ｂ	（２）ベクトル	ア　平面上のベクトル	イ　ベクトルの内積	発展的学習

学習内容のキーワード	ベクトル、内積	**活用場面のキーワード**	品質管理、品質機能展開

題材とその活用場面

内積とは 2 つのベクトルから得られるスカラー量ですが、具体的なイメージがつかみ難いかも知れません。製造業において行われている製品の品質管理などの分野において、広く使われている手法に品質機能展開という手法があります。これは、お客さんが製品に対して求めていることを出発点に製品の品質管理や設計を行なう人がどのように活動すべきかを検討する際の支援手法です。実は品質機能展開の中でベクトルの内積計算が使われています。このようにベクトルの内積は、品質管理分野の手法においても活用されているのです。

説明

品質機能展開[1]では、まずお客さんが対象製品に対して求めている項目と各項目に対する重要度（重み）を、技術者が扱う製品のパラメータ（尺度、変数）の重要度に変換します。これによって、技術者がお客さんの満足度を効率的に高めるための示唆を得るのです。

例えば、ヘアドライヤを対象製品として実施した品質機能展開の事例[2]を参考にして、図 1 に示す簡単な例を使って説明しましょう。この場合お客さんはヘアドライヤを使う人達です。仮に「早く乾かせる」、「静かに動作」、「持ちやすい」ということ（ここでは「お客さんの要求」と呼びましょう）を望んでいるとし、各項目の重要度を 5 点満点で、順に 5、1、3 としましょう。また、ヘアドライヤを製造する技術者達は「空気流量」、「空気の温度」、「質量」というパラメータ（ここでは簡単のために「技術者の変数」と呼びます）を頭に入れて品質を管理しているとします。さらに、お客さんの要求の各々と技術者の変数各々が関係している度合いの強さ（「関連度」と呼びます）を弱い場合から強い場合に順に 0、1、3、9 で場合分けして入力します。早く乾かすという要求には、ドライヤの空気の流量が最も強く関係(9)しており、空気の温度は中程度の関係(3)を持っていることを示しています。品質機能展開では、技術者の変数の各々に対して「総得点」を求めて、お客さんの満足度を高めるためには総得点の高いものにより労力を注ぐことを示唆します。

総得点を求める方法に、内積が使われます。（お客さんの）重要度を１つのベクトル、各技術者の変数の関連度を１つのベクトルとして、両者の内積を計算するのです。これによって、お客さんの要求の重要度が高いものと強い関連度を持っている技術者の変数はより重要なものと認識されるのです。

図１に示したように、「空気流量」に対して総得点は 54 と計算されます。「空気の温度」と「質量」は各々 18 と 27 です。この結果から、この場合はお客さんの要求を効率的に満足するために重要な技術者の変数は、順に「空気流量」、「質量」、「空気の温度」となり、技術者は例えば限られた時間の中では「空気流量」の改善に労力を注ぐのが望ましいという示唆が得られます。

（坂尾知彦）

題材分類	高数Ｂ

添付図表

		重要度	技術者の変数		
			空気流量	空気の温度	質量
お客さんの要求	早く乾かせる	5	9	3	0
	静かに動作	1	9	0	0
	持ちやすい	3	0	1	9
		総得点	54	18	27

$\bigcirc = \boxed{} \cdot \boxed{}$　（2つのベクトルの内積）

＝５・９＋１・９＋３・０
＝４５＋９＋０
＝５４

図１　品質機能展開（例）の一部

出典情報

[1] 赤尾洋二:品質展開入門,日科技連出版社，1990.
[2] 坂尾知彦,増井慶次郎,稲葉敦: 品質機能展開を用いた環境調和型製品設計手法の開発，エコデザイン2000ジャパンシンポジウム，pp.22-25，2000.

事例シート

題材分類	高数C

題材主題	意思を定量化する
副題	行列計算で明らかとなる主観の定量値

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
高校数学C	（１）行列	ア行列とその演算	（イ）行列の積と逆行列	発展的学習

学習内容のキーワード	行列、逆行列、固有値、固有ベクトル	活用場面のキーワード	意思決定、階層分析法（AHP：Analytic Hierarchy Process）

題材とその活用場面

新しい商品を開発して売りに出す、経営者が次の事業を展開する、社会の至るところで、意思を決定する場面があります。このような時、「人びとが何を、どれくらい重要視するか」が数値的にはっきりとすれば、重要視するものに力を注ぐことで、良い結果が得られるようになるでしょう。行列の学習は、人の感覚、すなわち主観を数値で測ることにも活用されています。

説明

あなたは、今、自転車を買おうとしています。A 社の多段変則（性能）自転車か、B 社の赤くて格好いい（デザイン）自転車か、C 社の安い（価格）自転車か、どれを買うかで悩んでいます。

実は、このような時、考えている要素を、一つずつ比較していくことで、重要視することは何かを数値で表して結論を導くことができます。今、あなたの考えている問題は、図１のように比較する要素を記述できます。そして、次の順番で、物事を一つずつ比較してみます。

(ア) 自転車を買う時、「性能」「価格」「デザイン」を、どういう順番で優先させたいか？

「性能と価格ではどっち？」、「価格とデザインではどっち？」、「デザインと性能ではとっち？」

(イ) 「性能」面では、「A 社」「B 社」「C 社」のどれが優れているか？（以下、同様）

(ウ) 「価格」面では、「A 社」「B 社」「C 社」のどれが優れているか？（以下、同様）

(エ) 「デザイン」面では、「A 社」「B 社」「C 社」のどれが優れているか？（以下、同様）

（ア）の場合、３つを比較して図２のような行列を作ります。このとき、

$$\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

となるような、ベクトルを求めると、$w_1 : w_2 : w_3$ があなたの考える性能：価格：デザインの重要度の比較となります。実は、λを固有値、w_1、w_2、w_3 からなるベクトルを固有ベクトルと呼びます。

例えば、２×２の行列のとき、次のような関係がありますね。

$$\begin{Bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

ここで、λ＝５であるとか、0.8 や 0.6 は、図３のような行列の関係から、行列式を求めることで導くことができます。

（丸貫徹庸）

題材分類	高数C

添付図表

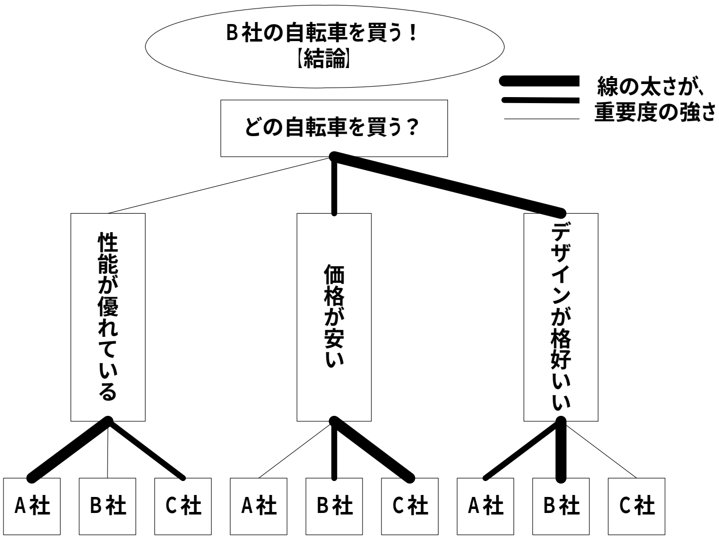


図１　どの自転車を買うか？で比較すること

$$3\times3\text{の正方行列A}=\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Bmatrix}$$

添字１：性能、２：価格、３：デザイン

$a_{11}=a_{22}=a_{33}=1$

a_{12}: 性能より価格がどれくらい重要か（数値が大きいほど重要）

a_{21}: 価格より性能がどれくらい重要か（a_{12}の逆数：$1/a_{12}$）

図２　意思決定の正方行列の要素

$$\begin{Bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{Bmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\Leftrightarrow\left(\begin{Bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{Bmatrix}-\lambda\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}\right)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

このとき、$\left(\begin{Bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{Bmatrix}-\lambda\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}\right)$に逆行列が存在すると、$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$は$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$となってしまう。

よって、行列式$\left|\begin{Bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{Bmatrix}-\lambda\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}\right|$が０（逆行列が存在しない）を解く。

図３　２×２の正方行列での考え方

出典情報

事例シート

題材分類	高数Ｃ

題材主題	確率密度分布はどんな場面で活用するの？
副題	製品の環境負荷分析における活用事例

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
数学Ｃ	（４）統計処理	ア　正規分布		

学習内容のキーワード	分布、統計分析、誤差	活用場面のキーワード	環境負荷分析、ライフサイクルアセスメント、意思決定

題材とその活用場面

統計処理を学ぶ上で重要な概念である分布は、産業界の様々な場面での意思決定に利用されています。なぜなら、世の中で扱われる変数の値は一般に一意に（一定の値に）定まることは少なく、ある分布に従うと仮定するのが妥当である場合がほとんどだからです。例えば、製品の環境負荷を分析する手法であるライフサイクルアセスメントを適用し結果を解釈する過程において適用されています。このように、分布の概念は意思決定に活用されています。

説明

環境問題は現代社会に生きる我々にとって避けては通れない問題です。消費者は何らかの用途に応じて市販の製品を購入していますが、その場合にも出来るだけ環境に対して与える負荷の少ない製品を選択して購入することが期待されます。製品が環境に対して与える負荷を計算する方法としてライフサイクルアセスメント（製品やサービスの資源採掘から廃棄に至る一生の間の環境への影響を評価する手法。以下 LCA とする。）が良く知られています。LCA とは、対象の製品に対して、資源の採掘から、素材の製造、製品の組立、使用、廃棄までの製品の一生に渡る間で発生する環境負荷を足し合わせます。ここではパソコンを例にとって LCA を適用して、地球温暖化に影響を与える二酸化炭素の排出量を計算して 2 台のパソコン（パソコン A と B とします）を比較する例を簡単に説明しましょう。

パソコンの LCA 実施において分布の概念が登場する場面を例として挙げると、パソコンを構成する素材の製造時の二酸化炭素排出量があります。例えばパソコンに鉄が 100g 含まれているとした場合、その鉄を精錬する過程でどれだけの二酸化炭素排出量があったかは、その際に利用した鉄鉱石の品質（例えば高炉に投入される重油の量へ影響を与える）、鉄鉱石を製鉄所まで運搬した距離（例えばタンカーの重油消費量に影響を与える）などによって異なります。またパソコンの使用時に消費する電力を発電させる際の二酸化炭素排出量については、利用する電力がどんな手段で発電されたか（例えば火力発電と水力発電では同じ電力量を発電する際に排出される二酸化炭素の量は大きく異なる）によって異なります。

（坂尾知彦）

題材分類	高数C

添付図表

LCA で入力されるものには上記のような性質を持つ値が多々あるために、パソコンの一生での二酸化炭素排出量（LCA で計算される結果）は一意に定まらず、何らかの確率密度分布に従うのが通常です。例えば、図 1 のような結果が得られたとします。この例では、最頻値でみればパソコン A の 100g よりもパソコン B の 120g が大きいため、B の方が二酸化炭素排出量が大きいことになりますが、両方とも幅を持った値となっており、パソコン A の方が B よりも二酸化炭素排出量が大きいケースもあり得ることを示しています。結論としては、パソコン B の方が A よりも二酸化炭素排出量が大きい確率が高いということになります。

この例のように扱うデータにばらつきがある場合には分布という概念を持ち込むことが必要で、結果として得られる値にも分布の概念をベースに意思決定をすることが、LCA に限らず産業界では良くあります。

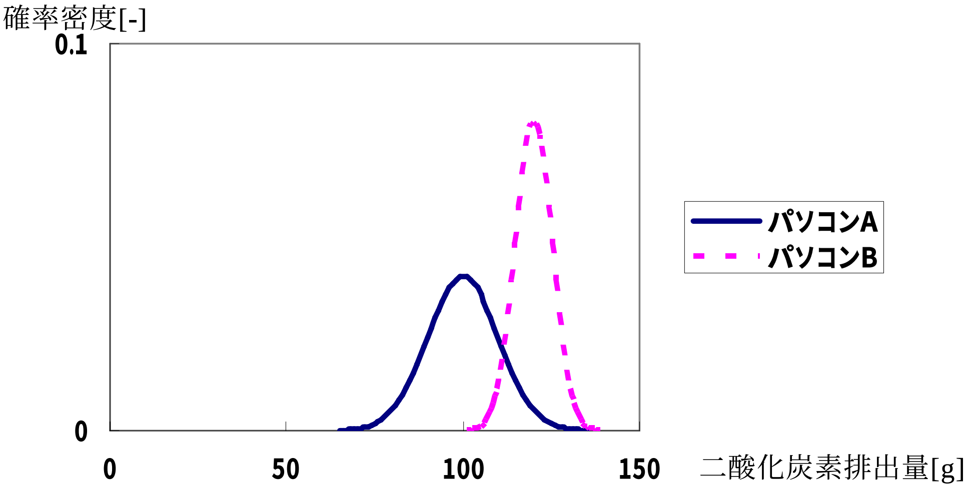


図１　パソコン A と B の一生での二酸化炭素排出量の確率密度分布例

出典情報

題材分類	高数C

題材主題	行列ってどんな場面で使われているの？
副題	産業連関表を使った経済分析

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
高校数学C	（１）行列	イ　行列の応用	（ア）連立一次方程式	発展的学習

学習内容のキーワード	行列、逆行列	**活用場面のキーワード**	経済分析、産業連関表

題材とその活用場面

行列は高校で学ぶ数学の中でも抽象的なものですが、意外にも実際に利用されている分野は多くあります。例えば経済を分析する際に用いられる産業連関表の活用においては、行列計算なしには成り立たない程です。例えば産業連関表を活用することによって、経済の波及効果などの分析を行なうことができるなど、行列の学習は、経済の分野での分析に活用されています。

説明

ノーベル経済学賞を受賞したレオンチェフにより考案された産業連関表は、経済学で実際の国（地域）の経済活動を分析するために用いられます。投入係数表と呼ばれる行列とその基となる金額別産業連関表を一般的に書いたものを各々表２と表１に記します。金額別産業連関表とは、ある国に存在する産業をｎ個に分類し、各産業がある一定期間に活動をするために各産業から購入したモノやサービスの金額を集計したものです。例えば表１では、産業１は総額で X_1円の購入をし、産業２から X_{21}円の購入をしたことを示しています。具体例としては、自動車産業が鉄鋼業から１兆円の鉄鋼を購入しているというようなことが表現されます。

さてここで行列計算を使った、経済の波及効果の分析のさわりを簡単に紹介します。今仮に産業１に対して１単位の需要があったとします。これによって、各産業の生産はどの程度の量だけ引き起こされるでしょうか？この分析は、例えば自動車 100 万台の需要に伴って、自動車産業、鉄鋼業その他の全産業にどの程度の生産額が発生するかということを知りたい時に行なわれるものです。

まず各産業に生じる当初の効果（0 次の効果という意味で(0) と付記)をベクトルで表すと(1)式になります。第１次の波及効果、第２次の波及効果（第１次波及効果の更なる波及）は各々以下のようになります。

$$\begin{pmatrix} X_{11}^{(0)} \\ X_{21}^{(0)} \\ \vdots \\ X_{n1}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots (1) \quad \begin{pmatrix} X_{11}^{(1)} \\ X_{21}^{(1)} \\ \vdots \\ X_{n1}^{(1)} \end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots (2), \quad \begin{pmatrix} X_{11}^{(2)} \\ X_{21}^{(2)} \\ \vdots \\ X_{n1}^{(2)} \end{pmatrix} = A\cdot A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots (3)$$

$$I + A^1 + A^2 + \cdots + A^m = (I - A)^{-1} \cdots (4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + A\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + A^m\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (I + A^1 + A^2 + \cdots + A^m)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (I - A)^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \\ \vdots \\ \beta_{n1} \end{pmatrix} \cdots (5)$$

題材分類	高数C

　各産業への効果は、各産業に生じる０次からｍ次（ｍは充分大きな数）までの効果の和ですが、実は(4)式の関係が成り立つ（説明は省略）ため、結果として(5)式によって求まります。

　表３と表４にレオンチェフ行列 $(I-A)$ と逆行列係数表 $(I-A)^{-1}$ を一般的に書いたものを各々記します。こういった経済分析は国の政府の景気対策などに応用されています。

（坂尾知彦）

添付図表

表１　金額別産業連関表　$[X_{ij}]$

from ＼ to	産業１	産業２	・・・・・・・・	産業 n
産業１ 産業２ ・ 産業 n	X_{11} X_{21} ・ X_{n1}	X_{12} X_{22} ・ X_{n2}	・・・・・・・・ ・・・・・・・・ ・・・・・・・・ ・・・・・・・・	X_{1n} X_{2n} ・ X_{nn}
総投入額 X_j	X_1	X_2	・・・・・・・・	X_n

表２　投入係数表　$[a_{ij}]=[A]$

	産業１	産業２	・・・・・・・・	産業 n
産業１ 産業２ ・ 産業 n	a_{11} a_{21} ・ a_{n1}	a_{12} a_{22} ・ a_{n2}	・・・・・・・・ ・・・・・・・・ ・・・・・・・・ ・・・・・・・・	a_{1n} a_{2n} ・ a_{nn}

（注）$a_{ij}=\dfrac{X_{ij}}{X_j}$

表３　レオンチェフ行列　$[\theta_{ij}]=[I-A]$

	産業１	産業２	・・・・・・・・	産業 n
産業１ 産業２ ・ 産業 n	$1-a_{11}$ $-a_{21}$ ・ $-a_{n1}$	$-a_{12}$ $1-a_{22}$ ・ $-a_{n2}$	・・・・・・・・ ・・・・・・・・ ・・・・・・・・ ・・・・・・・・	$-a_{1n}$ $-a_{2n}$ ・ $1-a_{nn}$

表４　逆行列係数表　$[\beta_{ij}]=[\theta_{ij}]^{-1}=[I-A]^{-1}$

	産業１	産業２	・・・・・・・・	産業 n
産業１ 産業２ ・ 産業 n	β_{11} β_{21} ・ β_{n1}	β_{12} β_{22} ・ β_{n2}	・・・・・・・・ ・・・・・・・・ ・・・・・・・・ ・・・・・・・・	β_{1n} β_{2n} ・ β_{nn}

出典情報

題材分類	高数Ｃ

題材主題	**たくさんのデータからおおまかな傾向を把握するには？**
副題	統計データに最も近い回帰直線をあてはめる最小二乗法

学習指導要領の教科・科目	**学習指導要領の大項目**	**学習指導要領の中項目**	**学習指導要領の小項目**	**備考**
高校数学Ｃ	（４）統計処理	イ 統計的な推測	（ア）統計的な推測の考え	
高校数学Ｃ	（１）行列	イ 行列の応用	（ア）連立一次方程式	

学習内容のキーワード	連立方程式、微分、誤差、行列	**活用場面のキーワード**	データ解析、統計処理、回帰直線

題材とその活用場面

統計分野では、実験から得られた測定データ等を元にグラフを作成してから、データに最も近い直線を描くことがよくあります。この直線を“回帰直線”といいます。回帰直線のパラメータは、連立方程式を解くことにより、測定データとの誤差の二乗和が最小になるように求められます。これを“最小二乗法”といい、たくさんの測定データからおおまかな傾向を把握するための手法です。

微分や連立方程式に関する学習は、データ解析や統計処理に生かされています。

説明

直線の式 y=ax+b を決定する際、平面上の 2 つの点について X 座標および Y 座標が与えられている場合、傾き a と切片 b という 2 つの未知数に関する連立方程式を解く必要があります。では、与えられる点情報が 3 つ以上あり、解が一意に定まらない（つまり全ての点を通る一本の直線が存在しない）場合に、全ての点を考慮して最も近い直線を引くにはどうすればよいでしょうか。

例えばある“ばね”の特徴を調べるために実験を行い、吊るしたおもりの重さ x_i[g]とばねの長さ y_i[cm]をＮパターン測定し（i=1～N）、図２のように測定データをグラフ上にプロットしていきます。このとき両者は比例関係にありますが、誤差の影響により完全に一本の直線で表現することはできません。そこで測定データに最も近い回帰直線を求めるために、最小二乗法が用いられます。回帰直線の式を y=ax+b として、測定データの間の誤差の二乗和が最小となるよう、傾き a と切片 b という 2 つの未知数を解いていきます。

誤差の二乗和を式で表現すると、$E=(ax_1+b-y_1)^2+(ax_2+b-y_2)^2+\cdots+(ax_N+b-y_N)^2$ となります。これは二次関数なので、誤差の二乗和が最小になる頂点が存在します。この頂点を求めるため、未知数 a,b について微分してゼロとおき、整理すると以下の 2 元連立方程式が得られます。これを解くことにより、図３のように回帰直線 y=ax+b を定めることができます。

$$\frac{\partial E}{\partial a}=2\{(ax_1+b-y_1)\cdot x_1+\cdots+(ax_N+b-y_N)\cdot x_N\}=0、\quad \frac{\partial E}{\partial b}=2\{(ax_1+b-y_1)+\cdots+(ax_N+b-y_N)\}=0$$

$$a(x_1{}^2+\cdots+x_N{}^2)+b(x_1+\cdots+x_N)=x_1y_1+\cdots+x_Ny_N、\quad a(x_1+\cdots+x_N)+b\cdot N=y_1+\cdots+y_N$$

このように最小二乗法では、たくさんの測定データからおおまかな傾向を把握するための手法といえます。統計分野ではよく用いられる手法なので、この機会に理解しておきましょう。

（吉元怜毅）

題材分類	高数C

添付図表

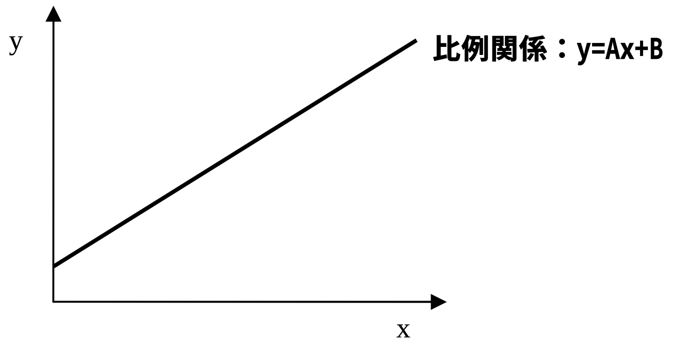


図１　理想的な比例関係

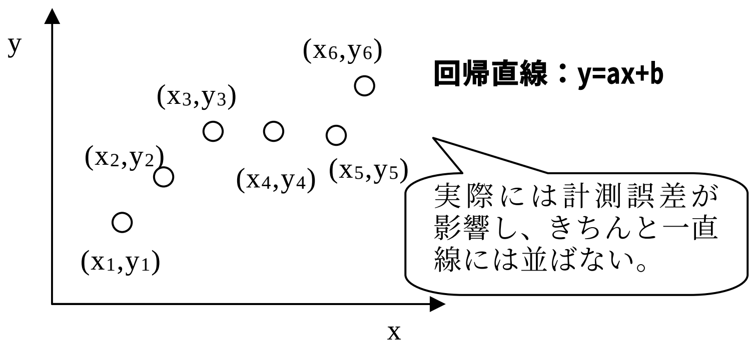


図２　実験データのプロット

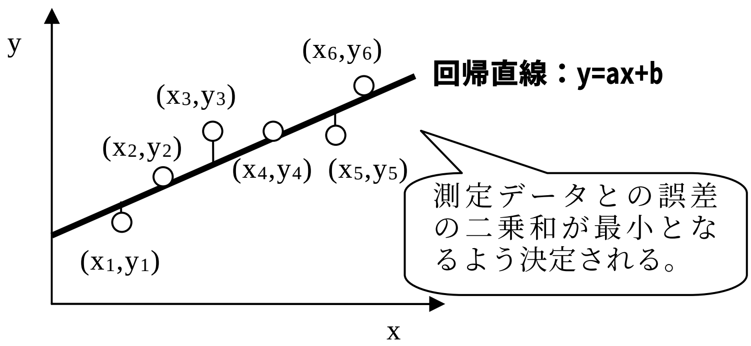


図３　最小２乗法の概念図

出典情報

題材分類	高数C

題材主題	判別分析で売上アップ！			
副題	顧客の特性を分析して販売促進			
学習指導要領の教科・科目	**学習指導要領の大項目**	**学習指導要領の中項目**	**学習指導要領の小項目**	**備考**
高校数学C	（４）統計処理	イ 統計的な推測	（イ）統計的な推測の考え	

学習内容のキーワード	統計処理、判別分析	**活用場面のキーワード**	マーケティング、顧客特性、販売促進

題材とその活用場面

統計処理手法のひとつとして、「判別分析」があります。判別分析とは、ある対象についてどの母集団に属するかを判別する方法です。

一人の顧客が自社製品を買うか買わないかを、顧客の特性や意識を用いて判断するような、マーケティングの分野で活用されています。過去のたくさんの事例を収集し判別分析を行って、顧客のどの特性が購買意欲と深い関わりがあるのか見出しておくことにより、販売促進・広告戦略に役立たせることができるのです。

統計処理に関する学習は、企業のマーケティング分野に生かされています。

説明

判別分析とは、ある対象についてどの母集団に属するかを判別する方法です。判別分析を実施するには、標本データを集めて定量化された形で把握し、どの母集団に属しているのかを予め区分けする必要があります。区分けする方法に「線形判別式」を使用する方法があります。

判別分析は、一人の顧客が自社製品を買うか買わないかを、顧客の特性や意識を用いて判断するような、マーケティングの分野で活用されています。この場合、買うか・買わないかを「目的変数」、顧客の特性などを「説明変数」と呼びます。

例えば、ある製品を購入する顧客層が、年齢 x_1 と所得 x_2 という２種類の説明変数と深い関係があることを想定し、図１のように購入した客（A 群）を○印、購入しなかった客（B 群）を×印で平面上にプロットします。このとき、買うか・買わないかという２つの目的変数を判別する線形判別式は $Z=a_1x_1+a_2x_2$ という式で、年齢と所得という２つの説明変数によって記述することができます。

しかし線形判別式は、母集団を分けられるからといって、やみくもに引けるものではありません。A 群や B 群のクラス内分散を小さく、かつ A 群と B 群のクラス間分散を大きくするような、判別基準が設けられています。線形判別式に含まれる未知数 a1 や a2 は、それらの判断基準を満たすように設定されます。

この場合、今後の顧客について年齢 x1 と所得 x2 のデータが得られれば、線形判別の式に代入し、判別式の値よりも大きければ購入、小さければ非購入として予測することができます。

過去のたくさんの事例を収集し判別分析を行って、“顧客のどの特性が購買意欲と深い関わりがあるのか”見出しておくことにより、企業にとっては販売促進・広告戦略に役立たせることができるのです。

（吉元怜毅）

題材分類	高数Ｃ

添付図表

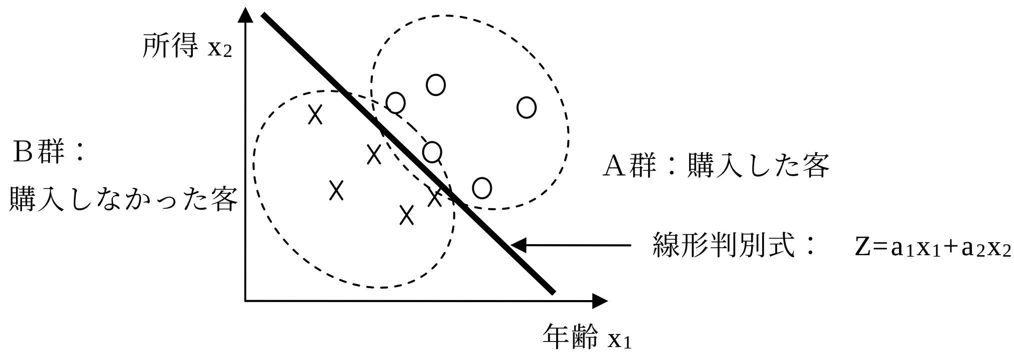


図１　線形判別式による２群の判別分析

出典情報

㈱インテージ「マーケティングリサーチ用語」　http://www.intage.co.jp/word60/75.html

事例シート

題材分類	高数Ｃ

題材主題	安心を支える確率
副題	リスク分散の仕組みが社会の発展を促す

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
高校数学 C	（３）確率分布	イ 確率分布	（ア）確率変数と確率分布	
高校数学 A	（３）場合の数と確率	イ 確率とその基本的な法則		

学習内容のキーワード	確率、期待値、分散、標準偏差	活用場面のキーワード	リスク低減、安心な社会、社会発展の基盤

題材とその活用場面

我々の生活は常にリスクと直面しています。このリスクを分散することが「不安感の低減」「安心の増大」につながります。こうした仕組みの基本は確率の考え方であり、これを仕組みを発展させることが、新たな問題に対して、失敗のリスクを乗り越えて挑戦してゆく社会の活力にもつながります。確率の学習は社会安全に幅広くつながっています。

説明

今、卵を 30 個もった人が市場に売りに行きます。卵は 1 個 10 円なので、無事全ての卵を届けられれば 300 円が手に入ります。ところが卵のかごを落としてしまう確率が 1/3 だとします。30 個を 1 つのかごに入れて一度に運べば。1/3 の確率で収入は０、２/3 の確率で収入は 300 円、収入の期待値は 200 円となります。

これを 10 個ずつ 3 回に分けて運べば（輸送費の増加等は無視します）、

・３回落としてしまう確率　1/27　0 円
・２回落としてしまう確率　6/27　100 円
・１回落としてしまう確率　12/27　200 円
・１回も落とさない確率　8/27　300 円

期待値は同じ 200 円ですが、一度に運ぶと全て失うか、満額得るかのどちらかの極端な場合だけだったのが、３回に分けると、約半分の確率（12/27）で期待値と同じ収入がえられるようになります。このリスクの大きさの指標が分散であり、期待値からの差の２乗×確率の和で求めます。この平方根が標準偏差です。

・１回で運ぶ場合　1/3×（200－0）^{2} ＋　2/3×（200－300）^{2} = 20000 （標準偏差は 141.4）
・3 回で運ぶ場合　1/27×200^2 ＋6/27×100^2 ＋8/27×100^2 = 6666 （標準偏差は 82.6）
・30 回で運ぶ場合　分散は 666.6、標準偏差は 25.8 となります。

運ぶ分割数を増やすと、期待値どおりの収入が得られる確率は高くなりますが、卵は 30 個しかないので 30 回以上に増やすわけには行きません。しかし同じような人が大勢集まり 100 円ずつ出し合って卵が壊れた場合でも 300 円の収入を保証する仕組みを作ることが考えられます。これが保険の基本的な仕組みです。

これにより、収入が０になる不安定なリスクのある状態から、200 円の収入が確定された安定な状態を得ることができます。この安心料として参加者は 100 円＋αを支払い、保険の運用が可能となります。

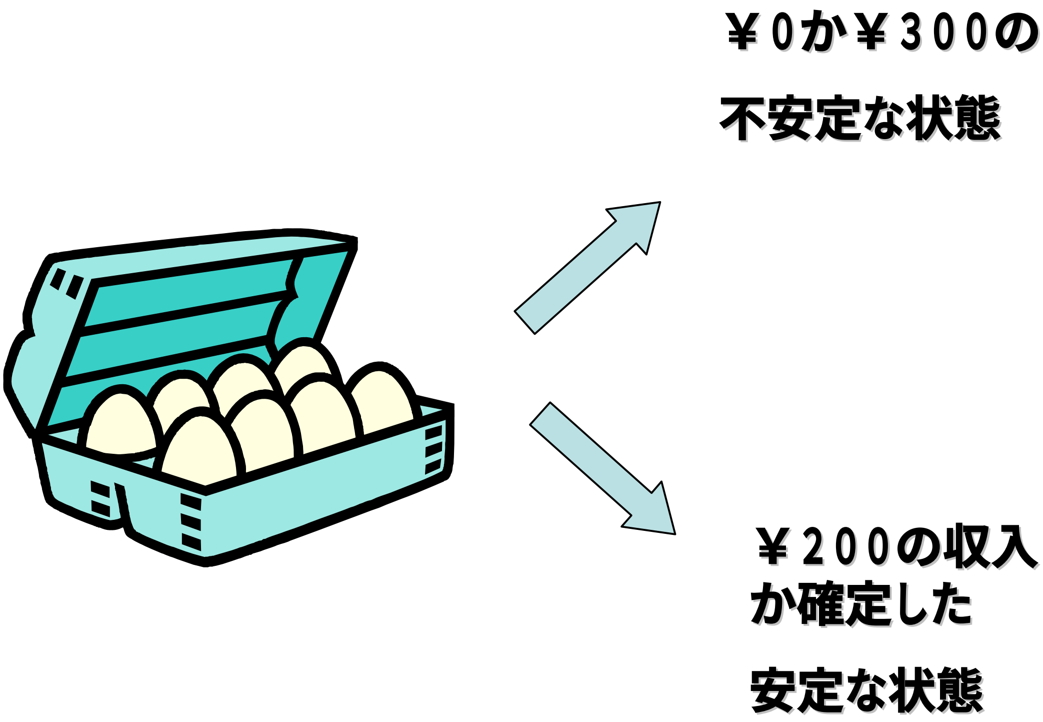
社会の発展には科学技術の進歩も重要ですが、こうしたリスクを低減させる仕組みもとても重要です。なぜなら新しいことに挑戦することはリスクを伴う場合が多く、このリスクを社会全体で分散して受け止める仕組みが、挑戦意欲の旺盛な社会の活力を育みます。近代から現代にかけて、保険制度や株式会社などの制度を整えたことが欧米社会の発展に大きく寄与したと考えられており、現代でも高度な確率理論を駆使した多様な金融商品の開発が精力的に進められています。

（山田秀幸）

事例シート

題材分類	高数C

添付図表



図

出典情報

金融工学　野口悠紀夫　ダイヤモンド社

題材分類	高数C

題材主題	行列で立体映像を作る
副題	大量の連立一次方程式を処理する

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
高校数学C	（1）行列	イ 行列の応用	（ア）連立一次方程式	

学習内容のキーワード	行列 連立一次方程式	活用場面のキーワード	CT スキャナー 放射線 3 次元データ

題材とその活用場面

レントゲン撮影で体の中を撮影することができますが、近年では立体的な映像を撮影することができます。立体的な映像を得るには撮影した映像をコンピュータで処理しますが、ここで行列の考え方が使われます。

コンピュータは単純な計算を大量に高速で処理するのが得意ですが、大量の連立方程式を解くのに行列の理論が使われます。

説明

レントゲンは、体の内部を透過する特殊な光（X 線）をつかって、骨などの映像を撮影します。最近は CT スキャナーと呼ばれる、立体的な映像を作ることができる装置が利用されています。これは物体を様々な方向から撮影した多数の映像から、立体的なデータを作りだす装置です。

多数の映像から立体的なデータを作る仕組みには、連立一次方程式の考え方が使われます。この仕組みを単純な図１を使い考えてみます。

図１を 4 つの領域 ABCD の密度（光の通り難さ：濃淡）を持つ領域からできていると考えてみます。これに対して縦と横の光を当て　ａｂとｃｄという像を得たとします。

これを式にあらわすと

A＋B＝ c
C＋D＝ d
A＋C＝ a
B＋D＝ b

となります。

ABCD の未知数 4 つに対して、4 本の連立一次方程式が得られましたから、これを解けば、ABCD がわかります。これを図２の様に立体的に細かく再分化していくことを想像してみてください。１つ１つのマスに値（光の通り難さ：濃淡）を定義すれば立体的な形が浮かび上がってきます。

しかし細かくすればするほど、連立一次方程式の数は多くなります。10×10×10 に分割しただけで
式の数は 1000 本になってしまいます。

行列を使うと機械的な作業で連立一次方程式が解けますが、これは方程式の数が増えても同じことが言えます。そしてこうした大きな行列の処理はコンピュータが得意な仕事なのです。また、行列の理論は、連立法廷式が解けるかどうかを判断するのにも役立っています。

（山田秀幸）

題材分類	高数Ｃ

添付図表

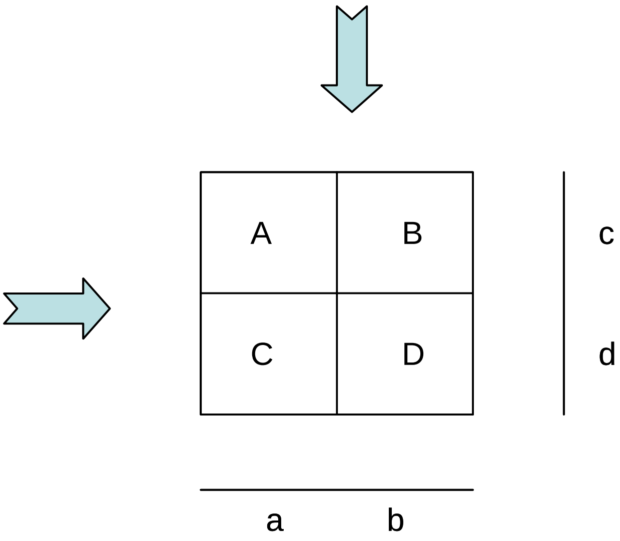


図１

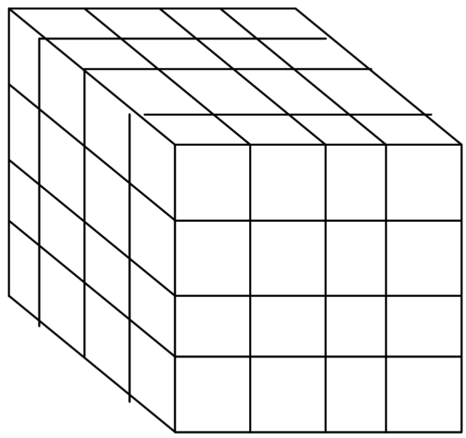


図２

出典情報

			題材分類	高数C
題材主題	行列のバンド幅			
副題	メモリ使用量低減による効率的計算法			
学習指導要領の教科・科目	**学習指導要領の大項目**	**学習指導要領の中項目**	**学習指導要領の小項目**	**備考**
高校数学C	（１）行列	イ行列の応用	（ア）連立一次方程式	発展的学習

学習内容のキーワード	行列、対称行列	**活用場面のキーワード**	行列のバンド幅、離散化、数値計算

題材とその活用場面

物体に力を加えるとどのように変形するか、温度を加えるとどのような温度分布になるか、このような物理現象を計算するためには、実物をそのままモデル化することはできません。そのために、ある間隔の点の集合としてモデル化を行います。このことを離散化と呼び、離散化によってモデル化された数式を解く場合には、行列の計算が活用されています。

説明

図１のように、直方体を 12 個の点で代表させるようなモデル化を考えます。各点の真ん中にさらに点を作り、新しくできた点同士の真ん中にさらに点をつくり…、としていくと、点がびっしりと詰まった状態になって、より直方体に近づきます。物理的な現象を数式で解明するためには、このように連続体を離散した点で代表させる手法がよく使われます。これを離散化されたモデルと呼びます。

さて、図１のように点に番号を付けたとします。「１」の点は、「２」と「４」と「７」の点と結ばれています。このように、結ばれている点の関係を行列に表すと、図２のようになります。点と点が結ばれていない成分には、０が入っています。この行列は、対角に対称な行列となります。そこで、行列の上半分だけを考えたときに、０で無い成分が存在する領域を各列ごとに縦に合計すると、59 個の升目を使用します。

それでは、図３のように番号を付け直した場合はどうなるでしょうか。同じように、結ばれている点の関係を表す行列を作ると、49 個の升目となります。

成分が０である場合、行列計算で成分の掛け算の結果は０となりますから、コンピューターなどにモデル化する場合は、非０の成分データだけ記憶させておけばよいことになります。

行列で、対角線から、有効な数字（即ち、非０である成分）がどれくらい離れているか、これを行列のバンド幅と呼びます。図２と図３の行列を比較すると、バンド幅は図３の方が小さいことになります。このバンド幅が小さければ、数字を記憶しておく領域が小さくてすみます。

このように、番号の付け方によって、点を結ぶ関係を表す行列は異なってきます。一番、行列のバンド幅が小さくなるような番号の付け方をすることによって、コンピューター資源を最も有効に活用することができるようになります。これによって、点の数が多くなる、即ち大規模な問題へも対応できるようになります。

（丸貫徹庸）

題材分類	高数C

添付図表

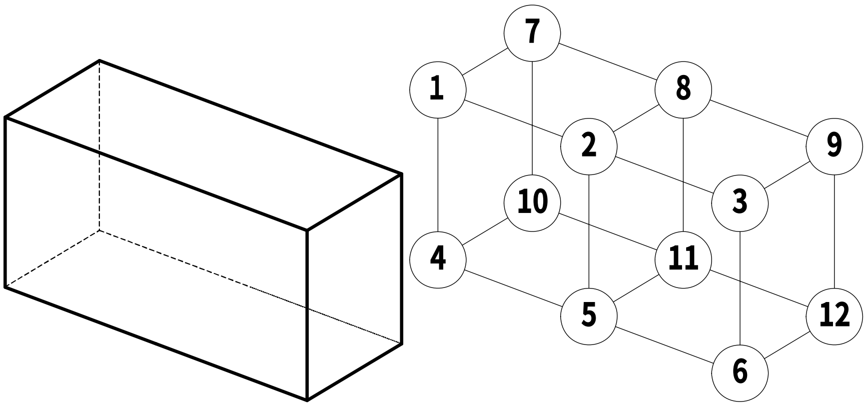
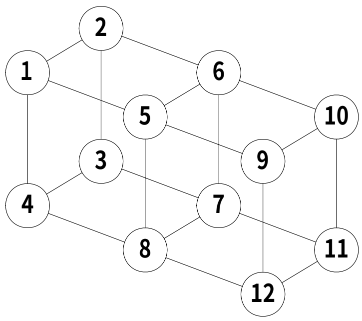


図１　直方体をモデル化する

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
2			1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
3				0	0	1	0	0	1	0	0	0
4					1	0	0	0	0	1	0	0
5						1	0	0	0	0	1	0
6							0	0	0	0	0	1
7								1	0	1	0	0
8									1	0	1	0
9										0	0	1
10											1	0
11												1
12												

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1		1		1			1						
2			1	0	1		0	1					
3				0	0	1	0	0	1				
4					1	0	0	0	0	1			
5						1	0	0	0	0	1		
6							0	0	0	0	0	1	
7								1	0	1	0	0	
8									1	0	1	0	
9										0	0	1	
10											1	0	
11												1	
12													
	1	2	2	4	4	4	7	7	7	7	7	7	= 59

図２　図１の点の関係を表した行列



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2			1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
3				1	0	0	1	0	0	0	0	0
4					0	0	0	1	0	0	0	0
5						1	0	1	1	0	0	0
6							1	0	0	1	0	0
7								1	0	0	1	0
8									0	0	0	1
9										1	0	1
10											1	0
11												1
12												

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1		1		1	1								
2			1	0	0	1							
3				1	0	0	1						
4					0	0	0	1					
5						1	0	1	1				
6							1	0	0	1			
7								1	0	0	1		
8									0	0	0	1	
9										1	0	1	
10											1	0	
11												1	
12													
	1	2	2	4	5	5	5	5	5	5	5	5	= 49

図３　番号を付け替えた関係を表した行列

（例：　「１」の点は、「２」と「４」と「５」の点と結ばれている）

出典情報

題材分類	高数Ｃ

題材主題	**販売予測で悩める経営者を救う**
副題	売上高を統計で予測する

学習指導要領の教科・科目	**学習指導要領の大項目**	**学習指導要領の中項目**	**学習指導要領の小項目**	**備考**
高校数学Ｃ	（４）統計処理	イ　統計的な推測	（イ）統計的な推測の考え	

学習内容のキーワード	回帰分析、最小二乗法	**活用場面のキーワード**	販売予測

題材とその活用場面

販売する商品がどのくらい販売できるか、出店する店舗がどの程度の売上高を伸ばせるか、企業ではさまざまな調査をしています。

例えば、周辺の人口と販売額に強い関連がある場合、人口を説明変数として販売額を予測する手法として、回帰分析などの手法が用いられます。

微分や統計の学習は、販売予測など、実際のビジネスの場で有効に活用されています。

説明

企業の販売予測では「回帰分析」という統計的手法がよく使われます。

回帰分析は、予測をしたい変数(従属変数)とその予測を説明する変数（説明変数）の関係を合理的な数理モデルで表す方法です。

例えば、Ｓチェーンの経営者が、Ａ駅前に店舗を出店しようかどうか、考えているとします。その場合、Ａ駅前に出店した場合どのくらい客が入り、売上高を伸ばせるか、ということが経営者の関心事です。Ｓチェーンは既に、Ｂ駅～Ｆ駅までに駅前に５店舗を出店しており、駅の周辺の人口と店の売上高に強い関連があることがわかっています。

この時、予測をしたい変数を「売上高（Y）」とし、Ｂ駅～Ｆ駅までの店舗周辺の人口を説明変数「人口（X）」と仮定します。そして、それぞれの店舗周辺の人口と売上高の値を（店舗１周辺の人口，店舗１の売上高）＝（x_1,y_1）、同店舗２＝（x_2,y_2）、同店舗３＝（x_3,y_3）‥と置いた場合、ｘとｙの関係をもっともよく説明できる直線を計算によって導き出します。

用途により様々な回帰分析が研究されていますが、最も基本的なのが、全てのデータと求める回帰直線の残差の合計を最小にするようにする線形分析です。回帰直線は＜ｙ＝a＋ｂｘ＞という式で表します。

回帰直線を導くためには、最小二乗法などの方法が用いられます。「最小二乗法」とは、理論値と実績値の差を最小にすればよいのですから、理論上の各店舗の売上高$y_{1\sim n}$を$\hat{y}_{1\sim n}$と表した場合、次のような式が最小になる値を算出することが必要です。

$$(y_1-\hat{y}_1)^2 + (y_2-\hat{y}_2)^2 + \cdots + (y_n-\hat{y}_n)^2$$

２乗をするのは、理論値と実際の値の差がプラスのものとマイナスのものにばらつきがあるからです。

回帰分析にも欠点があります。回帰分析は「過去または現在のデータを分析し、そこからなんらかの法則性を導き出し、それを元に未来に起こることを予測する」というものです。そのため、過去に起こったことがないことは予測できません。変化の激しい現在、これからの経営者を救うためには、より複雑な予測を行う必要があるかもしれません。

（平川幸子）

題材分類	高数C

添付図表

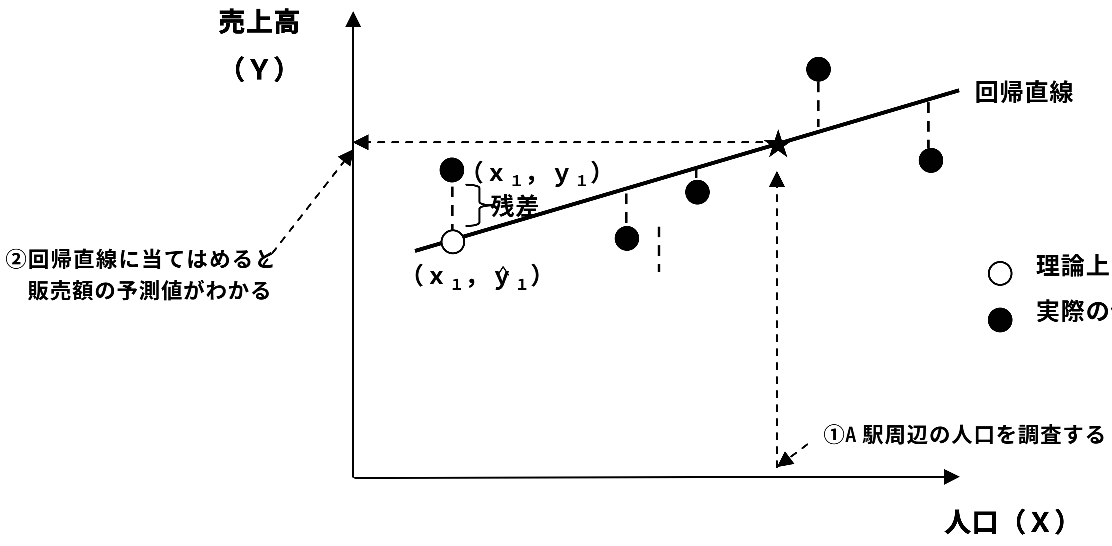


図１　回帰分析（単純回帰）のしくみ

出典情報

富山県統計課(1992)「経済指標のかんどころ」,p192-193,富山県統計協会

事例シート

					題材分類	高数C
題材主題	変動幅とリスクの関係					
副題	幅があることがリスクであるという考え方					
学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考		
高校数学C	（３）確率分布	イ確率分布	（ア）確率変数と確率分布	発展的学習		
学習内容のキーワード	確率分布、期待値、分散		活用場面のキーワード	VaR（バリューアットリスク）、ボラティリティ、リグレット		

題材とその活用場面

未来のある時点で、ある出来事が発生する可能性は一意の確率で表すことはできずに、「最も起こりそうな場合」から「最も起こらなさそうな場合」まで幅が考えられます。このような一意に物事が確定できないことを、不確実性があると言います。研究開発や製造などの技術的な活動分野、災害の発生や風評による信頼の低下などの社会的な分野、商品販売や投資などの経済的な活動分野といった全ての分野で、成功と失敗の将来の不確実性を計量するために、確率分布の考え方が活かされています。

説明

あなたが 100 万円投資して事業を始めようとしたときに、期待される成功は同じである図１の A,B ふたつの事業があるとして、どちらへ投資しますか？利益が出るかもしれないし、損失を被るかもしれません。成功と失敗の可能性の幅が大きい方が、リスクが高いと言えませんか？可能性の変動幅が小さいということは、予測している結果に収束しやすいので安心できます。金融では、このような幅をボラティリティと呼び、ボラティリティが高いとか、低いと言います。過去の変動データがあれば、ボラティリティは標準偏差として求められます。これをヒストリカル・ボラティリティと呼びます。

しかし、リスクを考える際には変動の幅だけでは不十分です。

期待される損失の最大値を、現在の価値がさらされている VaR（Value at Risk、バリューアットリスク）と呼びます。また、損失の量をリグレットと呼びます。（英語で、regret は“後悔”という意味ですね。）

あなたは今、100 円持っています。図２に示す C,D,E の３つのケースうち、どの賭けを選択しますか？

ケース E は期待値が最も大きいですが、VaR も大きくボラティリティが高い危険な賭けです。ケース C とケース D では、VaR は全く同じでボラティリティだけを見ればケース D の方が小さく安全に見えます。しかし期待値が異なることから、期待されるリグレットに差が生じます。期待されるリグレットはケース C が一番大きいので損失が小さく思えますが、あなたが「100 円くらいなら賭けをする余裕があって、はずれてもあまり後悔しない」、「120 円よりも 130 円手にする方が魅力的であるし、賭けの期待値も大きい」と考えれば、ケース E の賭けを選択するかもしれません。賭けのリスクは、あなたの価値基準に応じた指標で判断することが必要になります。

数学は、科学の世界だけではなく、株式の取引、企業の資産管理などの経済分野でも非常に大切な役割を担っています。

（丸貴徹庸）

題材分類	高数C

添付図表

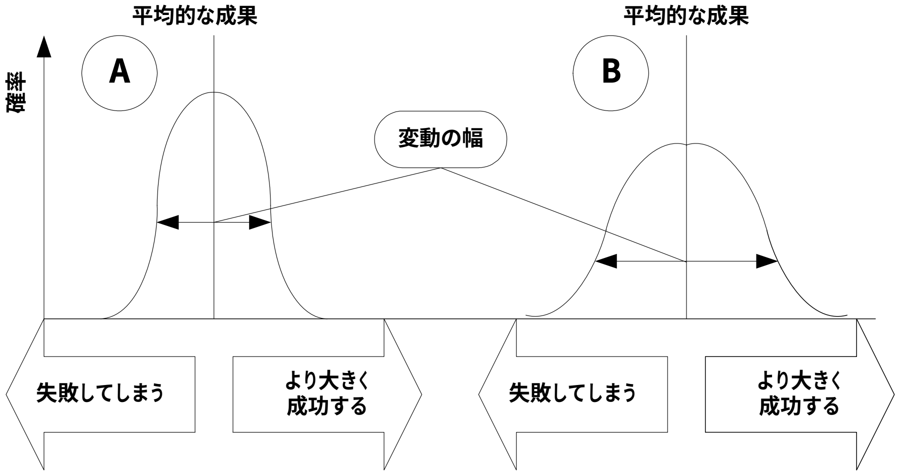


図１　確率分布の異なる A,B ふたつの事業

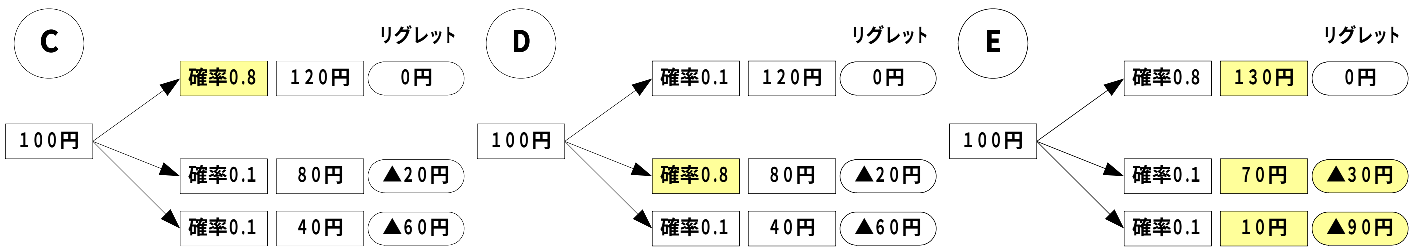


図２　３つの異なる投資ケース

表１　図２の投資ケースの比較

ケースC					
投資額	確率	結果	リグレット	期待値	108
100	0.8	120	0	VaR	60
	0.1	80	-20	分散	656
	0.1	40	-60	ボラティリティ	25.6
				リグレット期待値	-8
ケースD					
投資額	確率	結果	リグレット	期待値	80
100	0.1	120	0	VaR	60
	0.8	80	-20	分散	320
	0.1	40	-60	ボラティリティ	17.9
				リグレット期待値	-22
ケースE					
投資額	確率	結果	リグレット	期待値	112
100	0.8	130	0	VaR	90
	0.1	70	-30	分散	1476
	0.1	10	-90	ボラティリティ	38.4
				リグレット期待値	-12

出典情報

ロン・デンボー、アンドリュー・フリーマン（牟田誠一郎訳）、金融リスク入門、日経 BP 社（2000）

題材分類	高数基

題材主題	**携帯の文字入力の規則**
副題	数学的なアルゴリズムの身近な利用例

学習指導要領の教科・科目	**学習指導要領の大項目**	**学習指導要領の中項目**	**学習指導要領の小項目**	**備考**
高校数学基礎	（２）社会生活における数理的な考察	イ　身近な事象の数理的な考察		
高校数学Ｂ	（４）数値計算とコンピュータ	ア　簡単なプログラム		

学習内容のキーワード	数理的考察、コンピュータ、アルゴリズム	**活用場面のキーワード**	携帯電話、メール

題材とその活用場面

携帯でメールするという行為は今や高校生であれば、だれでも日常生活の中に溶け込んだものだと思います。携帯でメールを作成する場合の日本語の文字入力は、ある決められたルールがあり、それにしたがって入力する必要があります。このルールこそ、数学的な概念によって決められたものです。高校生であれば、だれでも簡単に入力できる規則に、数理的な考察力が役にたっています。

説明

（11111,6,888,111）という記号を見て、何を表しているのかすぐにわかりますか？「携帯」というキーワードを出せば、ほとんどの人がわかると思います。携帯メール等を作成するときに、入力する番号の例です。この場合だと、「おはよう」となります。このアルゴリズムはどのように決められているか、経験的にわかっている人が多いと思います。

携帯電話で日本語を入力する場合、デスクトップコンピュータのように、文字が配置されたキーボードがあるわけではなく、携帯電話の文字盤をみると、「１」、「２」、「３」という電話番号を入力する番号のそばに、「あ」、「い」、「う」という文字が書かれています。例外は一部ありますが、五十音の「あかさたな」の横方向がそれぞれ「１２３４５」に相当し、「あいうえお」の縦方向がその番号を押す回数に対応しています。本来、キーボードのようにすべてのひらがなが配列されていればよいのですが、携帯電話の場合には、キーが限られているため、このような法則であるアルゴリズムを作成しなければなりませんでした。この法則が複雑であったら、だれも入力できないでしょう。数学的な規則に基づき、だれでも簡単に入力できるという法則が携帯メールの利用を盛んにしています。このように、数学的な法則が身近なところで役に立っています。

（松本昌昭）

題材分類	高数基

添付図表

	あ	か	さ	・・・
あ	1	2	3	・・・
い	11	22	33	・・・
う	111	222	333	・・・
え	1111	2222	3333	・・・
お	11111	22222	33333	・・・

図１　携帯メール利用時の文字と入力の対応例

出典情報

事例シート

題材分類	高数基

題材主題	光と影の防犯対策
副題	防犯の観点から外灯がつくる家屋の影を考える

学習指導要領の教科・科目	**学習指導要領の大項目**	**学習指導要領の中項目**	**学習指導要領の小項目**	**備考**
高校数学基礎	（2）社会生活における数理的な考察	ア 社会生活と数学		

学習内容のキーワード	立体、射影	**活用場面のキーワード**	設計、防犯

題材とその活用場面

立体の射影の考えが、家屋の防犯設計に応用されています。

説明

いま、あなた自身が家の設計士になったと想像して、図 1 のように家屋が配置してある敷地を考えてみて下さい。この塀の四角のうち、2 か所に外灯を設置したいのですが、このとき、図 1 の（ア）、（イ）どちらのように外灯を設置したほうがよいと考えますか？

もちろん、建物の外観や周囲の環境との調和など様々な視点に基づいて考えられるため、一概にどちらがよいとは断言できませんが、「防犯」という視点で考えた場合、（イ）のように外灯を設置したほうが理想的であると考えられています。その理由を、立体がつくる影の観点から数学的に考えてみましょう。なお、外灯の高さは、車による影が無視できる程度の高さにあるものとします。

まず（ア）の場合、外灯の光と家屋がつくる影は図 2（ア）のようになりますが、このとき、２つの外灯のどちらにも照射されず、建物の影になる場所が 2 か所できてしまいます。これでは、もし悪意を持った侵入者が塀の中に入った場合に、身を隠しやすい場所をつくってしまうことになるのです。また、玄関部分も影になっていますが、これでは夜間の訪問者の判別がしにくくなるため、好ましくありません。

一方、（イ）の場合は、塀の中で影になる部分ができていないことがわかります。以上の点を比較することにより、（イ）の方が防犯的に理想的な外灯の配置であると考えられるのです。

意外な場面で、射影の考えが生活の安全に応用されていたのですね。

（瀧陽一郎）

題材分類	高数基

添付図表

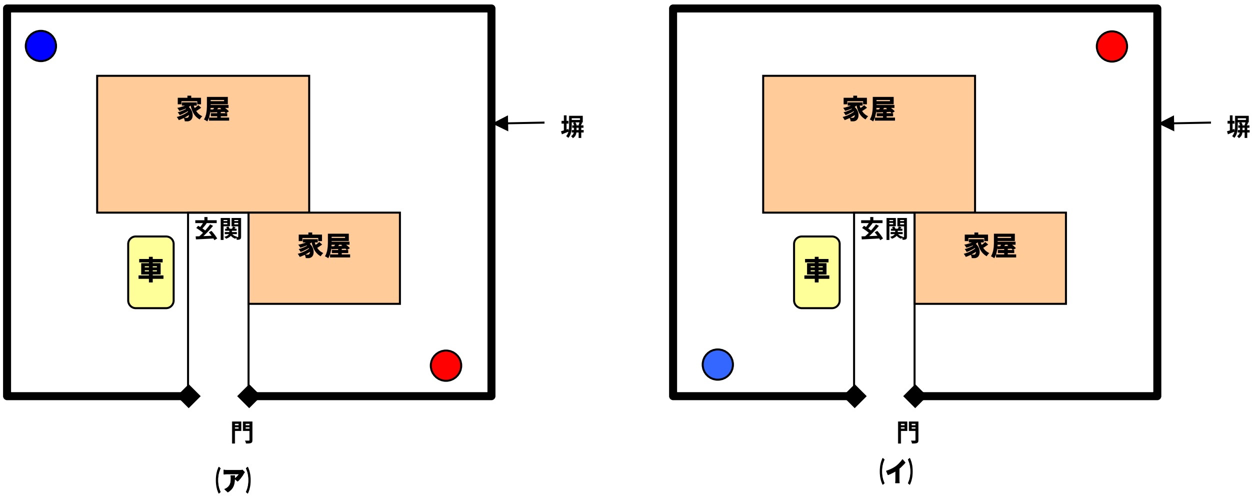


図 1　外灯の配置パターン

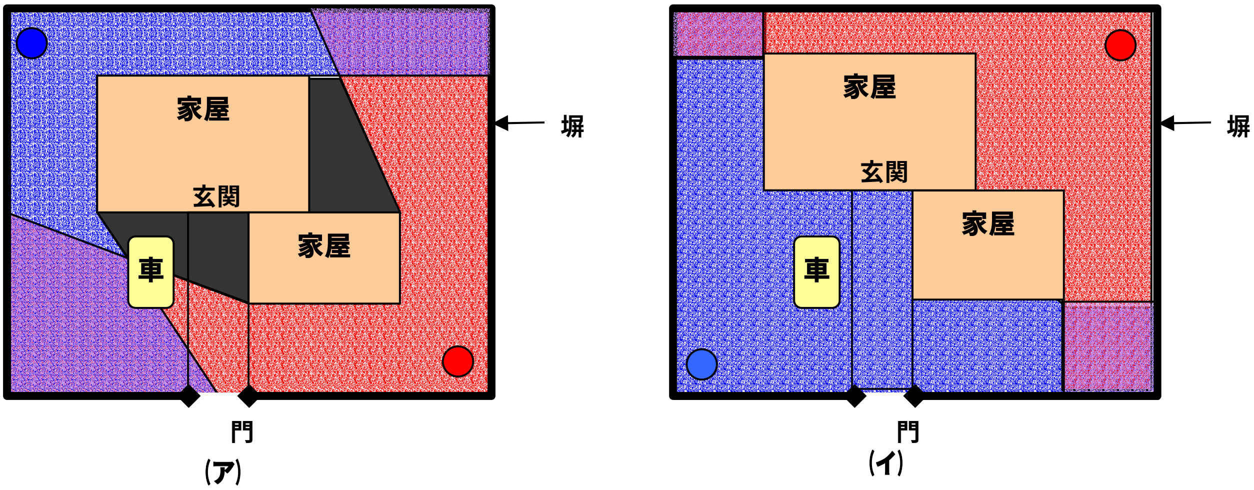


図 2　外灯による影のパターン

出典情報

エクスナレッジ「月刊「建築知識」2004 年 10 月号」エクスナレッジ、2004 年、p161

題材分類	中数１

題材主題	飲料水の缶の理想的な形は？
副題	体積・表面積の観点から、飲料水の缶の形状について考察する。

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
中学数学１年	B 図形	（２）空間図形の理解と図形の計量	ウ 扇形、柱体、錐体の計量	

学習内容のキーワード	体積、表面積、球、円柱	活用場面のキーワード	容器のデザイン、省資源、材料費効率化

題材とその活用場面

近年、環境問題が盛んに取り沙汰され、省資源やリサイクルといった言葉が日常的になっています。一方、普段、何気なく見ている飲料水の缶ですが、最近、従来の円柱型のもの以外に、上部はドーム型（半球型）、下部は円柱型の缶（ボトル缶）を見かけるようになりました。このボトル缶のデザインと、「体積が等しい場合、もっとも表面積の小さい形は球である。」という数学的な性質とを結びつけることによって、缶の材料の省資源化という側面から容器のデザインを考えることもできます。

説明

飲料水の缶には「のんだあとはリサイクル」などと書いてありますね。缶の代表的な材料であるアルミなどは限りある資源ですから、リサイクルが必要であると同時に、缶の製造段階で利用される材料の量が削減されることも重要です。そのため例えば、容積が同じ 350ml の缶の形が 2 種類あれば、より少ない材料で製造が可能な方が望ましいわけです。

ところで、体積が同じ場合、もっとも表面積の小さい形は球になるという性質があります。つまり、同じ体積をもつ容器であれば、その表面積が最も小さくなるのは、立方体でも円柱でも円錐でもなく、球になるということです。缶を製造する場合、最低限、「表面積×容器の厚さ」だけの材料が必要になりますから、少しでも球に近い形状が、より省資源的なデザインであるといえるでしょう。

最近、従来の円柱型の缶以外に、図 1 のようなボトル缶をよく見かけるようになりました。これは、消費者が内容物を飲みやすいように、従来の缶には無かった飲み口を追加したデザインの缶ですが、缶上部が半球型に近い形状になっていることにより、この飲み口部分の材料増加分が、わずかながらでも相殺する形状になっていることに気付きます。世界中の缶の消費量を考えた場合、このようなわずかな省資源化の積み重ねが、全体としてどれだけ大きな効果をもたらすかは想像に難くないでしょう。

では、なぜ、全体が球形の容器が作られないのでしょうか？それは置くのに安定が悪い上に、従来の円柱型よりも多くの面積を必要とするという理由がありますが、これも缶の幾何的形状の性質に基づくものです。普段、何気なく見ている缶の形に、このような背景を読み取ってみるのも面白いですよ。

（瀧陽一郎）

題材分類	中数１

添付図表

図１　ボトル缶の例

出典情報

参考サイト：大和製罐株式会社（http://www.daiwa-can.co.jp/quiz/answer.html）

題材分類	中数１

題材主題	**マンホールはなぜ丸い？**
副題	安全でおしゃれなマンホールを作ろう。

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
中学数学１年	B　図形	（２）空間図形の理解と図形の計量	ウ　空間図形の理解と図形の計量	
小学算数４年	C　図形	（１）基本的な図形の理解	ウ　円の中心、直径、半径の理解と描画、球の直径	発展的学習

学習内容のキーワード	図形、円、多角形、対角線、面積、円弧	活用場面のキーワード	安全設計、デザイン

題材とその活用場面

道路にはたくさんのマンホールがあります。地面の下に出入りするための穴のふたがマンホールですが、よくみると丸いマンホールばかり並んでいます。マンホールのふたが丸いのは、穴に落ちるのを防ぐためです。図形の辺と対角線の性質の理解が安全設計に結びついています。

説明

マンホールはなぜ丸いのでしょうか？　それは、ふたが穴に落ちないためです。

例えば、マンホールが正方形の場合を考えてみましょう（図１）。マンホールの１辺の長さを１とすると、対角線の長さは$\sqrt{2}$　1.414 です。マンホールのふたを立てた場合、1 辺の長さが 1 ですので対角線よりも短くなります。ふたを 45°回転させれば穴にすっぽりはまってしまいます。三角形の場合も同様に、1 辺の長さが 1 の正三角形を考えてみると、三角形の高さは$\sqrt{3}/2$　0.866 ですので、ふたを立てると 1 辺の長さよりも短くなり、穴に落ちてしまいます。これでは中で作業をしている人に危険です。

一方、円の場合、マンホールを立てても直径よりも短くなることはありませんので、穴に落ちることはありません。これだと中で作業をしていても安心です。したがって、マンホールは丸いのです。

ここで、マンホールの機能について考えてみましょう。マンホールは、地面の下に設置されている下水道や共同溝などの点検で人が出入りするために掘られた穴のふたです。普段からたくさんの人が出入りする場所ではありませんので、地面に穴をあけるのはできるだけ小さくしたいところです。

図 2 を見てみましょう。円と三角形の間に 3 つの円弧でできた図形があります。これは「ルーローの三角形」と言われるものです。3 つの円弧の半径の長さは、中にある正三角形の 1 辺の長さと同じです。この場合、ふたを立てて最も短い辺の長さは三角形の 1 辺に等しくなりますので、ふたが穴に落ちることはありません。ふたが落ちず、地面の穴をできるだけ小さくしたい、ということを考えた場合、ルーローの三角形は円よりも適した図形と言えます。

（大熊裕輝）

事例シート

題材分類	中数１

添付図表

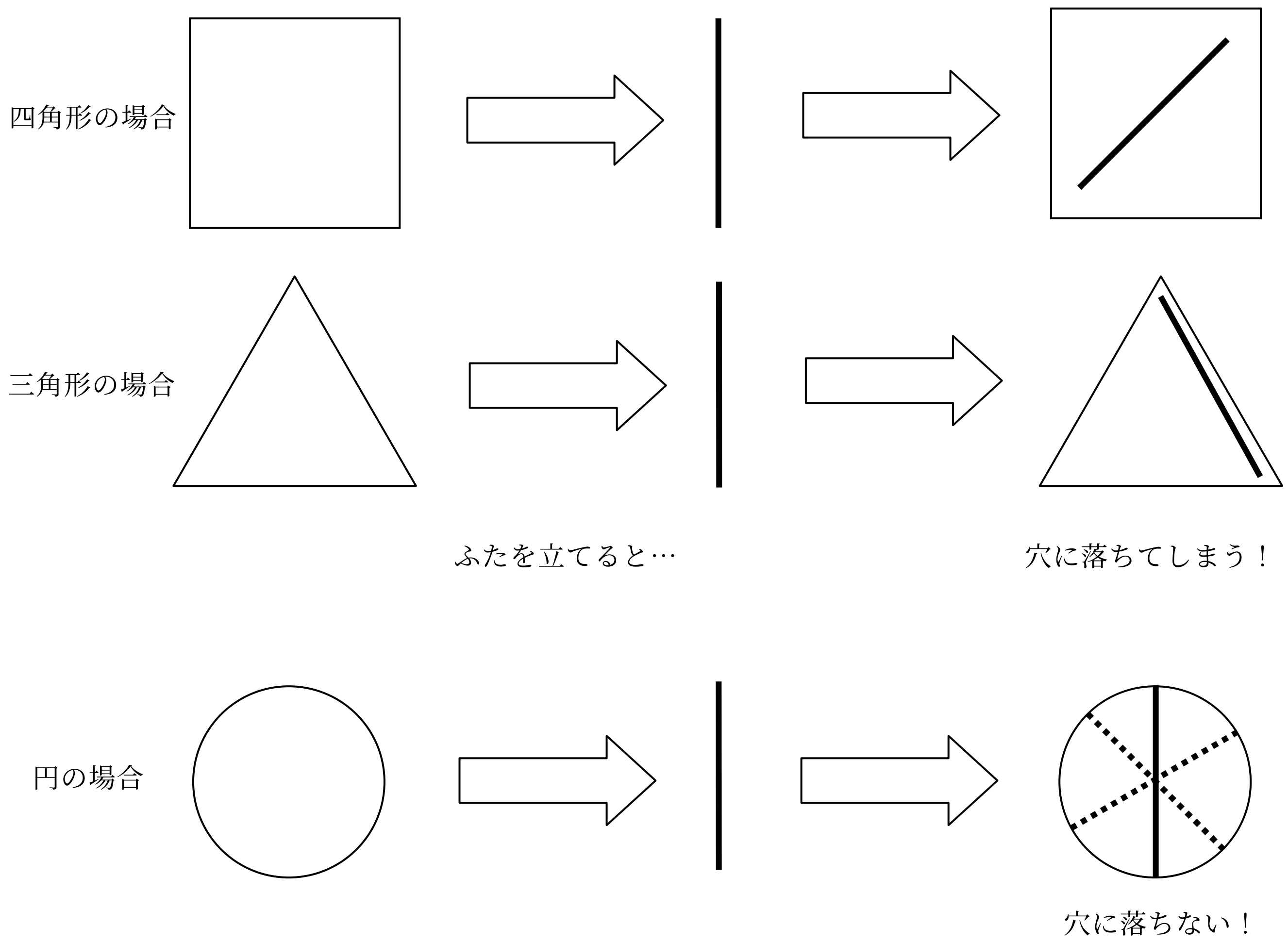


図１　多角形と円

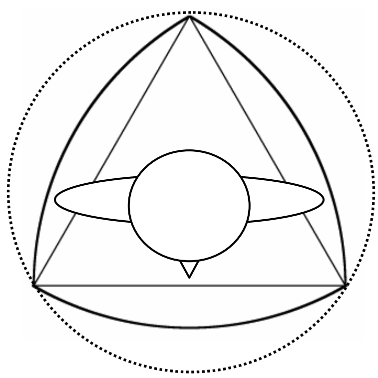


図２　ルーローの三角形

出典情報

題材分類	中数２

題材主題	**あなたは、何処へ遊びに出かけますか？**			
副題	遊園地・映画館・海・山、それぞれの楽しさの期待を数式で判断する			
学習指導要領の教科・科目	**学習指導要領の大項目**	**学習指導要領の中項目**	**学習指導要領の小項目**	**備考**
中学数学２年	Ａ数と式	（１）文字を用いた式の四則計算	イ文字式の利用の理解	発展的学習

学習内容のキーワード	平均値、文字式	**活用場面のキーワード**	ラプラス基準、マキシミン基準、フルビッツ基準、ミニマックス基準

題材とその活用場面

家族や友だちと遊園地、映画館、海、山へ行こうとしたとき、あなたは何処へでかけますか。きっと一番楽しいと思うところへ行くでしょう。この時あなたは、天気が晴れか、曇りか、雨か、あるいは風が強いかによって、遊びに行く場所が変わると思います。人が何かをしようと思ったときに、どれくらい期待感があるかということは、数式で表すことができ、物事を決心する上で重要な要素のひとつとなります。

説明

A さんは、晴れた日に海へ遊びに行かれれば、100 点満点で 70 点分楽しいと思っています。けれども、もし海に行って雨が降ってしまえば、楽しみは 20 点に減ってしまいます。例えば、表１に示すように、ある天気の時に、ある場所へ遊びにいくことが、何点くらいの満足であるかまとめたとします。さて、あなたは何処へ遊びに行きますか？

- ラプラス基準

この基準では、晴れ、曇り、雨、風が強い天気が、「同じくらい」の確率で起こると考えます。この場合は、平均が一番高い所が一番楽しめると考えられます。満足度の平均を考えると、（50 点＋40 点＋20 点＋40 点）／4＝37.5 点となり、遊園地へ行くことで一番平均点が高くなります。

- マキシミン基準

この基準では、とにかく最悪なことは避けたいと考えます。どのような天気になるにせよ、一番「まし」な所へ遊びに行こうと考えます。すると、どんな天気の時にも一番点数が「低くない」のは、映画館で、最悪でも 35 点は確保できることになります。

- フルビッツ基準

良い事の起こりやすさを、a という 0 から 1 の数値で決めてみます。そうすると、嫌な事の起こりやすさは、（1－a）で表せます。期待感＝（満足度の最も高い点数）×a＋（満足度の最も低い点数）×（1－a）で点数を評価してみましょう。a が 0.3 より小さい場合は、映画館が、35a＋（1－a）×35＝35 で一番高くなります。a が 0.3 より大きな場合は、海が、70a＋（1－a）×20＝50a＋20 で一番高くなります。

- ミニマックス基準

一番良い時と、最悪な時との点数の差が、小さなものを選択します。これは、何が起きても失望感を一番小さくしたい判断にもとづきます。晴れの日には海へ行けば 70 点で最高ですが、映画館に行けば 35 点で最低となりその差は 35 点です。曇りの時は遊園地が 40 点で最高ですが、海と山は 20 点で最低となりその差は 15 点です。全ての場合で、失望の差が 15 点と一番小さい山へ行くことにします。

（丸貫徹庸）

事例シート

題材分類	中数２

添付図表

表 1　あなたの満足度（楽しみ）の点数、100 点満点（例）

	晴れのとき	曇りのとき	雨のとき	風が強いとき
遊園地に行く	50 点	40 点	20 点	40 点
映画館に行く	35 点	35 点	35 点	35 点
海へ行く	70 点	30 点	20 点	20 点
山へ行く	60 点	30 点	20 点	20 点

ラプラス基準

平均値

遊園地　(50＋40＋20＋40)／4＝37.5
映画館　(35＋35＋35＋35)／4＝35
海　(70＋30＋20＋20)／4＝35
山　(60＋30＋20＋30)／4＝35

マキシミン基準

最悪な点数

	晴れ	曇り	雨	風
遊園地	50	40	20	40
映画館	35	35	35	35
海	70	30	20	20
山	60	30	20	30

フルビッツ基準

期待を表す変数の導入

遊園地　最大50×a＋最小20×（1-a）＝30a＋20
映画館　最大35×a＋最小35×（1-a）＝35　←　aが0.3より小さいとき、最大点数
海　最大70×a＋最小20×（1-a）＝50a＋20　←　aが0.3より大きいとき、最大点数
山　最大60×a＋最小20×（1-a）＝40a＋20

ミニマックス基準

損失の回避

最高点の場所

	晴れ	曇り	雨	風
遊園地	50	40	20	40
映画館	35	35	35	35
海	70	30	20	20
山	60	30	20	30

失望の幅

	晴れ	曇り	雨	風
遊園地	20	0	15	0
映画館	35	5	0	5
海	0	10	15	20
山	10	10	15	10

図１　各基準による考え方

出典情報

題材分類	中数２

題材主題	間違いさがしの応用
副題	２枚の写真を比較して、変化を抽出する。

学習指導要領の教科・科目	**学習指導要領の大項目**	**学習指導要領の中項目**	**学習指導要領の小項目**	**備考**
中学数学２年	B　図形	（２）平面図形の性質と三角形の合同条件	イ　三角形の合同条件の理解	発展的学習

学習内容のキーワード	図形の合同、リモートセンシング（遠隔探査）	**活用場面のキーワード**	土地利用状況、植生分布の変化抽出、火山噴火、洪水範囲の把握、土砂災害分布の把握　等

題材とその活用場面

２枚の絵を見比べて間違いさがしをしたことはありますか？　その違いは何で判断していますか？

その違いは、図形のかたちや色、位置などで判断していることでしょう。同様に、撮影時期が異なる２枚の写真を比較して、どのような変化があったかを見比べると、ある地域で起きた変化がわかります。例えば、今まで道路がなかったところに新しく道路が通ったとき、その前後の写真を見比べれば道路の部分が異なります。人工衛星や航空機から写真を撮ると、一度に広範囲の写真を撮ることができ、効率よく変化を調べることができます。図形の合同の学習は、逆に合同でない部分をみつけて変化した箇所を抽出することに活用されています。

説明

私たちのまわりを見渡すと、新しい家が建てられたり道路工事が行われていたり、木々の色づきや降雨・積雪など、日々変化しています。農村地帯では収穫時期になると刈り入れ前後で大きく変化します。もっと長い目でみれば、熱帯雨林の砂漠化や洪水などによる植生の変化、地震や土砂崩れ等による地形の変化などは、地上ではわかりにくいけれども空からみると一目瞭然です。

例えば、2004 年 10 月 23 日に発生した新潟県中越地震では数多くの土砂災害が発生しました。図１は、小千谷市の被災前後の人工衛星画像です。榎トンネル付近で大規模な土砂崩れが発生し、道路を分断しているのがわかります。また、大量に土砂が流れ出たことにより、信濃川がにごっているのもわかります。

地震や風水害など自然災害が発生した場合、あちらこちらで同時に被害が発生するため、被害の全体像を把握するのに相当の時間が必要になります。また、地盤が緩んでいる場所では、余震や大雨などにより土砂災害が誘発され、点検に出た道路管理者などが被害に巻き込まれる危険性があります。このようなとき、リモートセンシング技術（遠隔探査技術）が有効であると考えられています。災害発生直後にヘリコプターや航空機、人工衛星などから被害箇所を撮影し、事前に撮影しておいた画像（写真）と比較することによって変化した場所を見つけることができ、被害の分布や危険箇所を把握することが可能です。現在、実用化に向けて数多くの研究が進められています。

（大熊裕輝）

事例シート

題材分類	中数２

添付図表

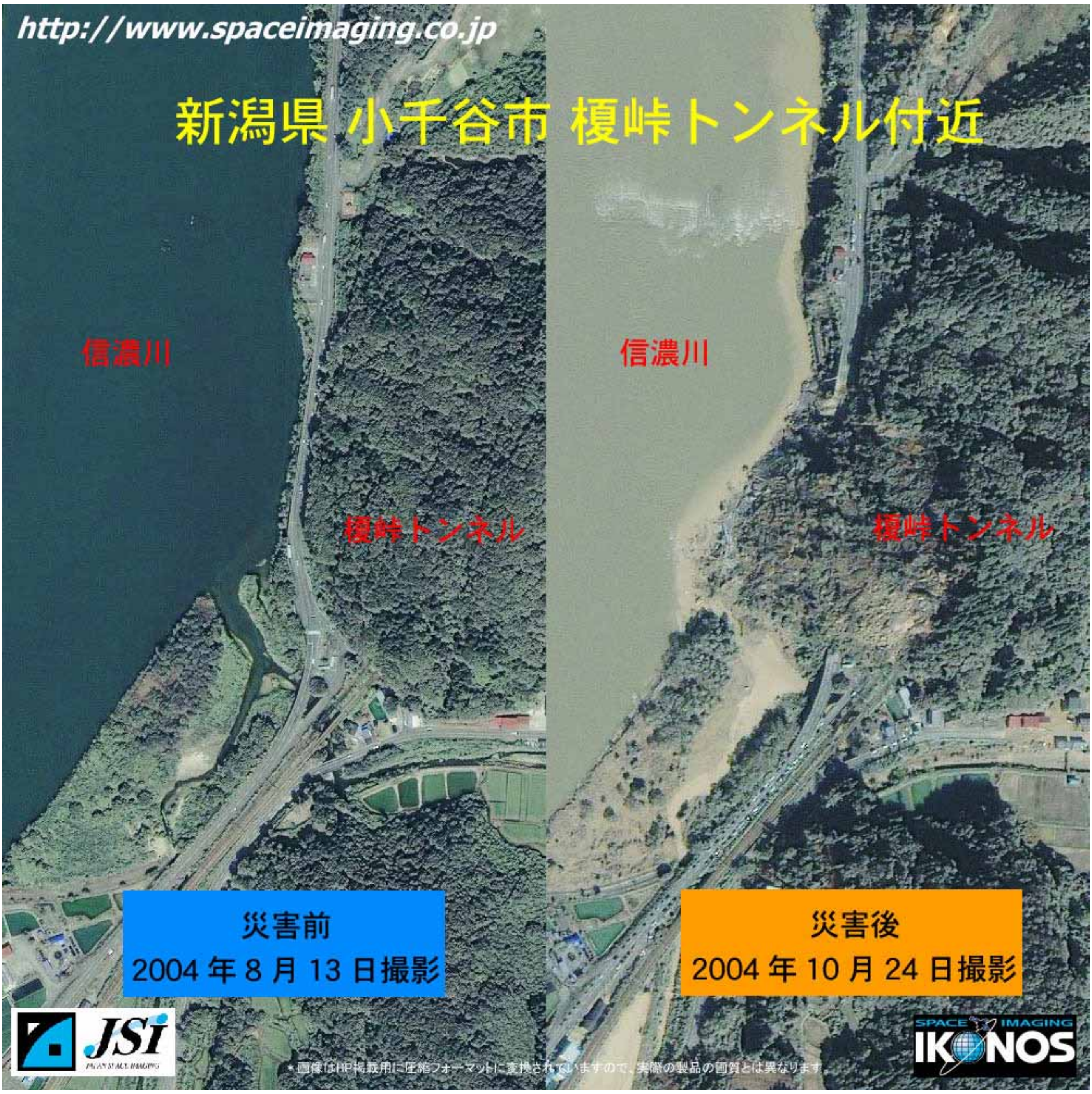


図１　新潟県中越地震･被災前後画像（日本スペースイメージングホームページより）

出典情報

日本スペースイメージング株式会社，URL：http://www.spaceimaging.co.jp/news/tyuetsu.html

			題材分類	中数２
題材主題	**携帯電話メールの送信料はどっちがお得。**			
副題	一次関数とグラフを用いた携帯電話料金計算。			
学習指導要領の教科・科目	**学習指導要領の大項目**	**学習指導要領の中項目**	**学習指導要領の小項目**	**備考**
中学数学２年	C　数量関係	（１）一次関数の理解	イ　一次関数のグラフの理解と利用	
学習内容のキーワード	一次関数、グラフ、不等号	**活用場面のキーワード**	携帯メール料金 各社サービス比較 料金設定比較	

題材とその活用場面

私たちは、携帯電話でメールを送ることはよくありますね。メール送信料金には、おおまかに、送信回数に比例して、料金が変わる従量制と、何回メールを送っても一定料金の定額制があります。最近は、多段階の定額制と従量制を組み合わせた料金（1 段目定額から 2 段目定額の間で従量制を適用など）もあります。また、料金は携帯電話会社によっても異なっています。それでは、従量制と定額制どちらがお得なのでしょうか。？このようにちょっと複雑思えるようなメール料金の計算も、一次関数やグラフを使うと、直感的に理解しやすくなりますよ。

説明

携帯電話でのメールの送信料金の例として、この従量制と定額制どちらがお得かを、計算してみましょう。なお、２つの料金制の金額やメール回数は、仮に設定したもので、実際とは同じではありません。

(1)従量制料金=メール回数×１メール当たりの料金（１回 10 円としましょう）

(2)定額制料金=一定額（月額 2,000 円としましょう）

従量制は、料金を y、メール回数を x とおくと、傾きが 10（円）の一次関数（y=10×x）で表せます。従量制で、メールを 200 回送ると

10 円×200 回=2,000 円

となり定額制料金と同じになります。201 回以上送る人は、定額制がお得、200 回以下は従量制がお得ということです。これは、関数を使わなくて比例でも計算できます。それでは、月額の定額料金が２段階になった場合は、どうでしょうか？

(3)「メール 300 回まで 2,000 円、301 回以上 4,000 円」

と従量制とではどちらがお得？

これも比例で計算することができますが、２段階ですので、ちょっと複雑になります。しかし一次関数のグラフを書いてみると簡単に判ります。図１に、メール回数と、(1)従量制料金、(3)定額制料金のグラフを書いてみました。201 回～300 回まで定額制がお得で、301 回以上は従量制=定額制、つまり、

10 円×x 回=4,000 円

となる回数、x=400 回まで従量制が、それ以上は定額制がお得です。

さて、皆さんの使っているメール料金は、どうなっていますか。お得、それとも。実際に、利用している各社の料金を比較して見みてどうでしょう。

（薮田尚宏）

題材分類	中数２

添付図表

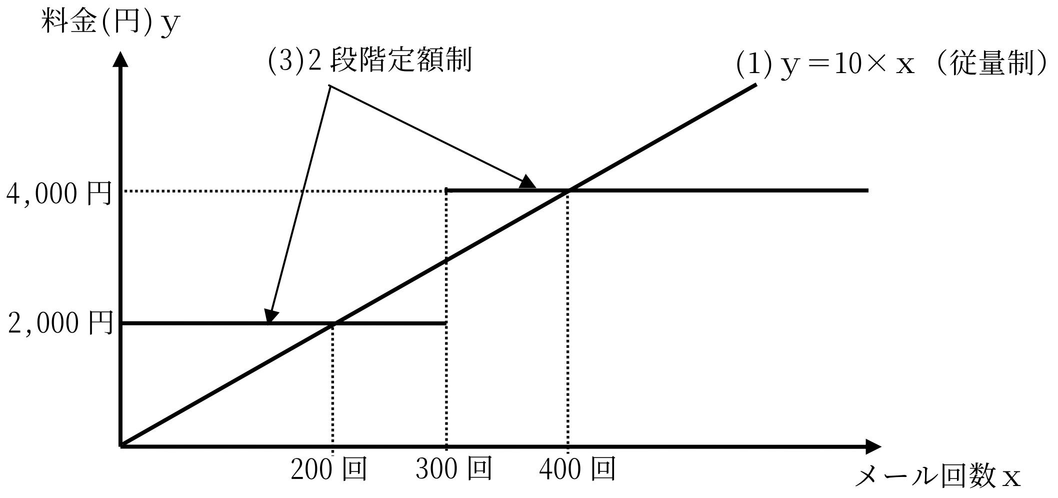


図１　メール回数と従量制と定額制の料金の関係

出典情報

題材分類	中数２

題材主題	**地震時における建物被害から人的被害を予測する**
副題	方程式による地震被害予測で地震直後の情報空白期を埋める

学習指導要領の教科・科目	**学習指導要領の大項目**	**学習指導要領の中項目**	**学習指導要領の小項目**	**備考**
中学数学２年	C　数量関係	（1）一次関数の理解	ア　一次関数の理解	

学習内容のキーワード	方程式	**活用場面のキーワード**	情報空白期、地震被害予測、全壊棟数、焼失棟数、死者数、負傷者数

題材とその活用場面

大規模な地震が発生した場合には、その発生直後には正確で十分な量の情報が得られないことが多く、そういった情報空白期における災害対策を支援する「地震被害予測システム」が国や自治体で整備されています。どのような揺れの場合にどのような被害が発生するかについて、過去の被害事例データをもとに方程式によって簡単に予測することができます。方程式の学習が地震被害の予測に活用されています。

説明

戦後における日本で発生した大規模地震の過去事例データを用いて、被害を予測する地震被害予測システムについて紹介します。地震被害予測システムの機能としては基本的には次があげられます。

〇揺れの大きさを予測する
〇液状化可能性を予測する
〇建物被害・火災を予測する
〇ライフライン施設被害を予測する
〇交通施設被害を予測する
〇人的被害を予測する
〇避難者数を予測する　等

気象庁や全国の自治体では震度計を設置しており、地震が発生した場合には瞬時に観測点の揺れの大きさを知ることができます。そうした震度計がない場所でも、震源の位置や地震の規模などを入力することで揺れの大きさを推定することもできます。ここでは、こうした揺れの大きさの推定→建物被害の推定→人的被害の推定という一連のシミュレーションの流れのうち、建物被害や火災の被害量をもとに人的被害を推定する方法について以下に示します。

表１に戦後の日本における主な地震の住家全壊棟数、焼失棟数及び死傷者数を示しています。住家全壊・焼失棟数と死者数、負傷者数との関係をグラフ化すると図１のようになります。グラフ中の一番右端にあるプロットは兵庫県南部地震（阪神・淡路大震災）のデータですが、これと原点を結んだのがグラフ中の２本の直線です。これを見ると、若干の誤差はあるものの、各プロットを比較的よく表現できているのがわかります。このグラフは被害が比較的大きな兵庫県南部地震、福井地震、昭和南海地震の３つのデータからほぼ成っていますが、このように兵庫県南部地震だけのデータから作成した直線からでも、他地震の被害傾向をよく再現できており、これは住家全壊・焼失棟数と死傷者数との関係が概ね一定であることを意味しています。

例えば、実線は兵庫県南部地震の住家全壊・焼失棟数と負傷者数を用いて、住家全壊・焼失被害(x)と負傷者(y)との関係を表した一次直線式であり、$y=0.393x$ と求めることができます。この関係を用いると、福井地震の場合には負傷者数を約 1 万 6 千人弱、昭和南海地震では約 4,600 人と推定することができます。実際に発生した負傷者数はそれぞれ約 2 万 2 千人、約 3,900 人であり、若干の誤差はあるものの近い値を示していることがわかります。

したがって、方程式を活用することで、建物被害から実際に発生する可能性のある死傷者数を算出することができるのです。こうした地震被害予測においては随所で方程式が活用されています。

（堤一憲）

題材分類	中数２

添付図表

表１　戦後の主な地震による被害

	年	住家全壊棟数(棟)	焼失棟数(棟)	死者･不明者数(人)	負傷者数(人)
昭和南海地震	1946	9,070	2,598	1,443	3,842
福井地震	1948	36,184	3,851	3,769	22,203
今市地震	1949	290		10	163
十勝沖地震	1952	815	20	33	287
吉野地震	1952	20		9	136
長岡付近の地震	1961	220		5	30
宮城県北部地震	1962	340		3	272
新潟地震	1964	1,960	290	26	447
えびの地震	1968	368		3	42
1968年十勝沖地震	1968	673	18	52	330
伊豆大島近海	1978	96		25	211
宮城県沖地震	1978	1,183	7	28	1,325
日本海中部地震	1983	934	5	104	163
長野県西部地震	1984	13	1	29	10
千葉県東方沖地震	1987	16		2	161
1993年釧路沖地震	1993	53		2	967
北海道南西沖地震	1993	601		230	323
三陸はるか沖地震	1994	72		3	788
兵庫県南部地震	1995	104,906	6,558	6,433	43,792

出典：「最新版　日本被害地震総覧[416]-2001」（宇佐美龍夫、2003）
兵庫県南部地震については平成 15 年 12 月 25 日消防庁発表の数値

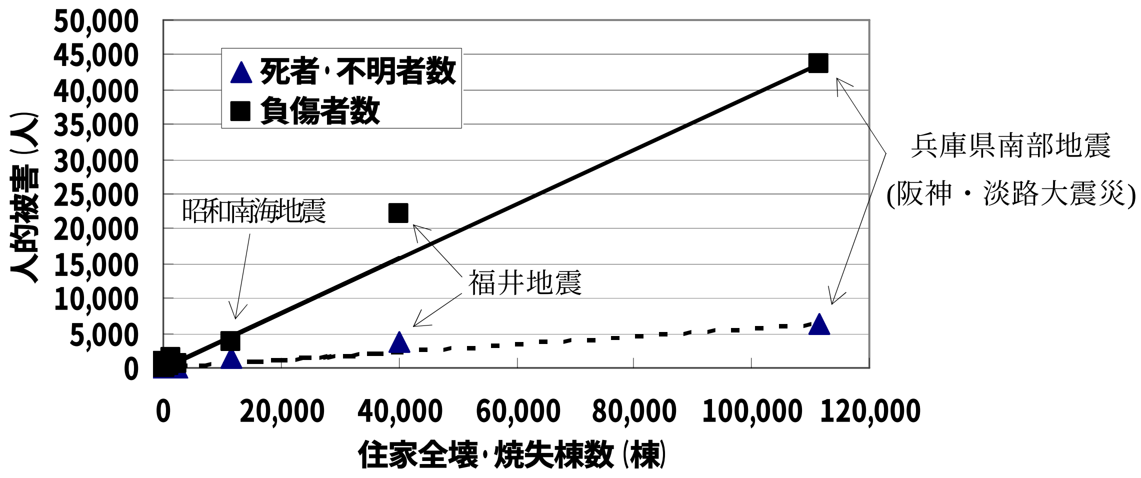


図１　住家全壊・焼失棟数と人的被害との関係

（表１のデータをもとに作成）

出典情報

宇佐美龍夫 (2003) 「最新版 日本被害地震総覧[416]-2001」, 東京大学出版会
総務省消防庁 (2003) 「阪神・淡路大震災について（第 107 報）」, 以下より検索、URL：http://www.fdma.go.jp/data/07117HanshinJishin107.pdf

事例シート

		題材分類	中数３

題材主題	**自分の身体が鍵になる**
副題	生体認証技術に利用されるパターン・マッチング

学習指導要領の教科・科目	**学習指導要領の大項目**	**学習指導要領の中項目**	**学習指導要領の小項目**	**備考**
中学数学３年	Ｂ　図形	（１）三角形の相似条件	ア　相似の理解と証明、ウ　相似の考えの活用	

学習内容のキーワード	図形、相似、遺伝情報	**活用場面のキーワード**	本人確認、生体認証、キャッシュカード、セキュリティ

題材とその活用場面

スパイ映画などで、目に光をあてて本人を確認するシーンをみかけます。バイオメトリック認証技術（生体認証技術）と言われる、生体的特徴を利用した本人確認の方式です。あらかじめ、指紋などの生体画像をコンピュータ上に登録し、入力した画像と照合できれば本人と確認する方法です。

銀行のキャッシュカードや部屋の入退出、ＰＣ等へのシステムログインなどへの実用化、導入が始まっています。この技術は、あらかじめ登録された画像等のデータと、入力したデータが同じものかどうかを照合して本人かどうかを確認するもので、図形の相似の考え方の応用であるともいえます。

図形の学習は、社会のさまざまな場所で活用されていると言えます。

説明

急速な情報化、ネットワーク化の進展により、電子化された様々なサービスが普及し、非対面での厳密な本人確認技術の必要性が高まってきています。従来はパスワードや IC カードなどで管理されていましたが、‘ なりすまし ’などによる被害が増大し、人間の生体の特徴によって個人識別を行うバイオメトリック認証技術（生体認証技術）が注目されています。

バイオメトリックは、指紋などの本人の生体的特徴を利用して本人確認を行う認証方式です。あらかじめ、指紋画像をコンピュータ上に登録し、入力した画像と照合できれば本人と確認する方法です。代表的な指紋認証の方法には、パターン・マッチング方式、特徴点（マニューシャ）方式などがあります。

パターン・マッチング方式は２枚の指紋画像を重ね合わせて照合する方法、マニューシャ方式は指紋の特徴点の属性とそれらの相対的な位置関係を特徴データとして登録照合するものです。パターン・マッチング方式は、比較的高速に処理が可能ですが、指紋の局所的な変形に弱く、また画像の容量が大きいという弱点があります。マニューシャ方式には、照合に時間がかかるという弱点がありますが、指紋の特徴データの容量が小さいという利点があります。

指紋などの外見の特徴のみでなく、手や指の静脈や目の虹彩（こうさい）や声紋などの体の内側にある個人の生体の内部にある特徴を用いる方法も、偽造が難しい方法として注目されています。

バイオメトリック認証技術には課題もあります。指紋や顔などの個人特有の情報は、住所や電話番号などと違って、変更することができないため、コンピュータなどに蓄積された個人情報を、不正に悪用されると取り返しがつかないのです。社会全体のセキュリティと個人のプライバシーの両立を課題としてバイオメトリクスはより実用的で便利なものに発展することが望まれています。

（平川幸子）

題材分類	中数３

添付図表

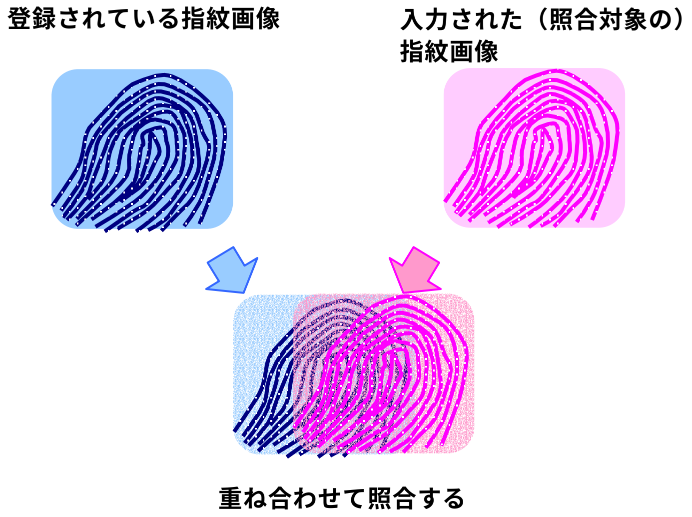


図１　生体認証システム（パターンマッチング）

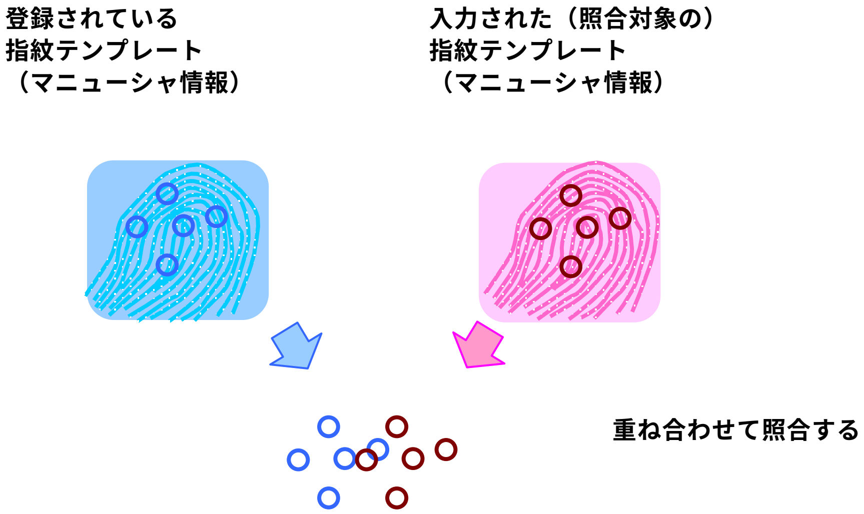


図２　生体認証システム（マニューシャ方式）

出典情報

CQ 出版社 HP「バイオメトリクス認証の動向と周波数解析法」,H17 年 3 月 4 日以下より検索,http://www.cqpub.co.jp/interface/sample/200503/if0503_chap2.pdf

題材分類	中数３

題材主題	弦楽器はルートの音色
副題	弦楽器の製作や調律には、平方根（ルート）の計算がかかせません

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
中学数学３年	A　数と式	（１）正の数の平方根の理解と利用	ア　平方根の必要性と意味の理解 イ　平方根を含む式の計算	

学習内容のキーワード	平方根の必要性 平方根を含む計算	活用場面のキーワード	弦楽器の音程調節（調律） 弦楽器の製作、弦楽器の演奏

題材とその活用場面

弦楽器の演奏では楽器特有の振動数の性質を理解することが重要となります。この振動数は、弦の長さと、単位長さあたりの重さ（線密度）、弦を引っ張る力（張力）から求められ、弦の長さと線密度の平方根に反比例し、綿密度の平方根に比例します。振動数の計算には中学校で学ぶ平方根が必要で、平方根を含む計算式は、弦楽器の調整や製作に活かされています。また、楽器の音程調整では弦を締めたり緩めたりしますが、締める強さの平方根で音程が変化していくことを理解しておくと、調整もやりやすくなります。

説明

ギター、電子ギター、バイオリン、三味線、ピアノ等の楽器は､弦を指やピック、バチで弾いたり、ハンマーでたたいたりすることで、弦を振動させて音を発生させています。各楽器の弦の振動の基本的な仕組みは、図１の通りで､発生する音の高さは、弦の振動の仕方で決まります。この弦の固有の振動数（ν）は、弦の長さ（L）、線密度（p）、張力（T）を用いて、次の式から計算されます。

$$\nu_n = \frac{n}{2\cdot L}\sqrt{\frac{T}{p}} \quad (n = 1,2,3\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot) \qquad (1)$$

（１）式からもわかるように弦の固有振動では、

$$\nu = \frac{1}{2\cdot L}\sqrt{\frac{T}{p}} \qquad (2)$$

（２）式の整数倍の振動（図２）が起こり、各振動に対応した音が重なって発生します。この振動数の大きさが、音階となり、複数の音階の重なりによって楽器の音色が決まります（図３）。

このように楽器の音色を調節する際には、弦を張るときの強さと弦の線密度（弦の長さと重さから算出）の比の平方根が計算できれば、どのような音となるか容易に推定できる。また弦楽器の製作する際にも、どのような音色が実現できるのか、この式を用いて推定が可能なのです。

（薮田尚宏）

題材分類	中数３

添付図表

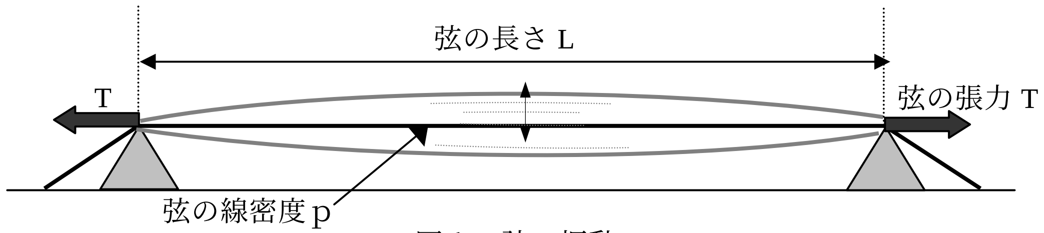


図１　弦の振動

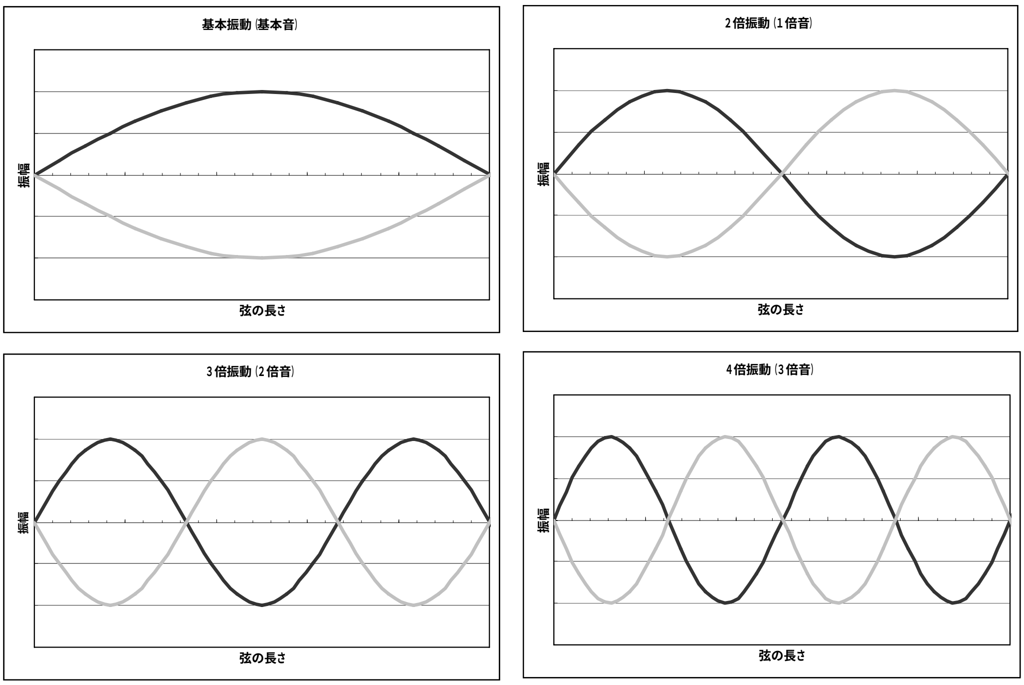


図２　弦の固有振動と音との関係

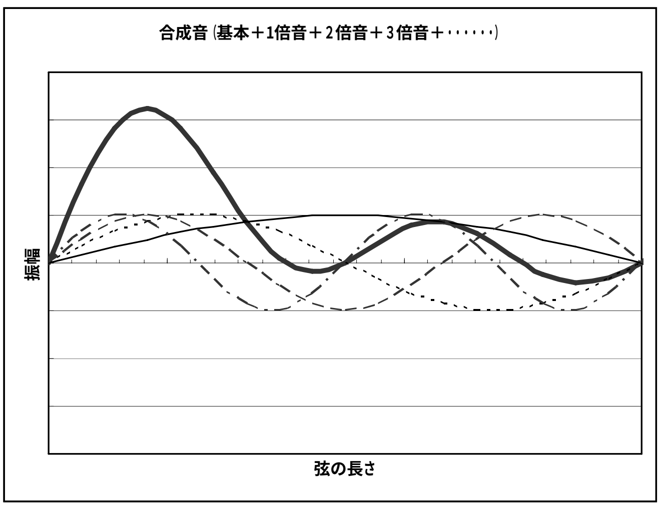


図３　弦の固有振動が作り出す音色（合成音）

出典情報

弦の振動と音の合成については、吉田卯三郎、武居文助、橘芳實、武居文雄 著（2002）「六訂物理学実験」三省堂を参考とした。

事例シート

			題材分類	中数３
題材主題	水平線はどこまで見える？			
副題	視点がちがうとどこまで遠くの水平線が見えるのだろう？			

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
中学数学３年	Ｂ　図形	（２）三平方の定理		

学習内容のキーワード	三平方の定理	活用場面のキーワード	水平線、視点

題材とその活用場面

海のかなたに見える水平線、それはどのくらい遠くが見えているのだろう、高いビルに登ったらどのくらい遠くまで見えるのだろう、飛行機からは・・・。

説明

海のかなたには、空と海とが交わる水平線が見えます。地球は丸いため、水平線より遠くにあるものは見えません。では水平線まではどのくらいの距離があるのでしょう。図１に示すように、水平線までの距離は、視点が水面からどのくらい高いところにあるか、その高さによります。

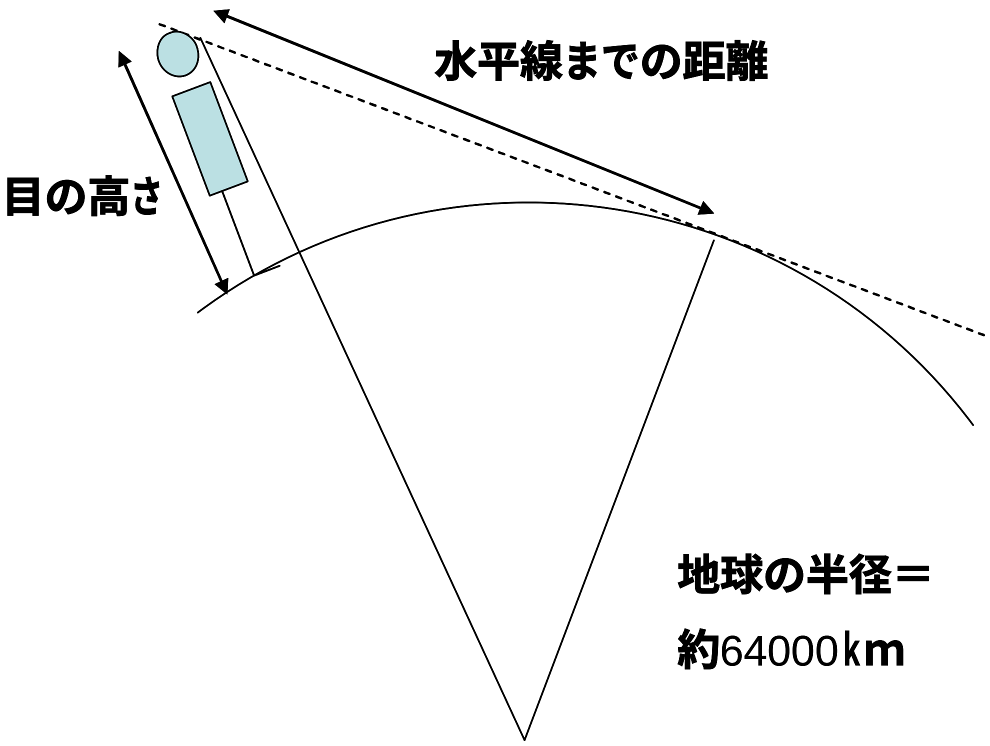
水平線までの距離 ^{2} ＝ （地球の半径＋目の高さ）^{2} ー　地球の半径 ^{2}

地球の半径を 6400km とし、目の高さを 150cm とすると、水平線までは約 4.4ｋｍとなります。
高さ 100mのビルに登り、これを目の高さとすると、約 38.3km となります。意外と近く感じるかもしれません。
昔の軍艦は大砲を撃ち合いましたが、世界で一番遠くに弾が届く大砲をもっていたのは日本の戦艦大和型で、その射程（弾が届く距離）は約 40km でした。船の一番高いところからでも、弾が一番遠くに届くところは見えないので、飛行機を飛ばし、水平線のかなたの見えない敵を観測しました。
大型旅客機は高度約 10000mを飛びます。ここからは約 400km が見えます。このぐらい高いと、見晴らしの良い冬の空気が乾燥したお天気の日であれば、本州の一番広い（太い）ところでも、日本海と太平洋を両方見渡すことができます。地球の丸さを感じるところまであと一歩というところでしょうか。

（山田秀幸）

題材分類	中数３

添付図表



出典情報

題材分類	小算３

題材主題	**ゴミの重さ**
副題	引き算で重さを量る

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
小学算数３年	A　数と計算	（２）加法と減法の計算	イ　加法と減法の確実な計算	
小学算数３年	B　量と測定	（１）長さ、かさ、重さの理解と測定	イ　かさ、重さの単位と測定の意味	

学習内容のキーワード	量と測定、数と計算	活用場面のキーワード	廃棄物処理場、計量

題材とその活用場面

生活の中で、廃棄物は毎日排出され、処分されていきます。しかし廃棄物を処理するのは無料ではありません。

廃棄物処理場の所有者である自治体などは、廃棄物を持ち込んだ企業に処理料金を請求するために、重さを量っている例が多いようです。毎日、量や重さが異なる廃棄物を計測するために、トラックで搬入される廃棄物をトラックごとに入場する際と退場する際の両方を計測し、その差が処理場に持ち込まれた廃棄物の量としています。

このように、計測や減法の計算の学習は、廃棄物の課金の場で活用されています。

説明

生活の中で発生する廃棄物は、廃棄物処理場や焼却場で焼却されたり、埋立地に埋め立てられたり、という処分をされています。

廃棄物を処分するには、焼却場の建築費や維持費の他、日々の収集作業など、膨大な費用がかかっています。

廃棄物の処分方法は自治体によって異なり、課金方法にも様々ありますが、企業から出される産業廃棄物は、個別に計量して有料で処理されている例が多いようです。重量に課金されることで、企業のごみを減らそうという意欲を引き出すことも期待できます。廃棄物を収集する量は毎日異なります。その異なる重量を計測するために、清掃工場では、トラックごとに重さを計測する計測器（巨大な体重計のようなもの）を持っています。

廃棄物を収集して、荷台に積んだトラックはまず入場する際に計測器に乗り、トラックとごみの量を合わせて量ります。そして、ごみを所定の収集場所に置き、退場する際に、空のトラックの重量を量ります。

入場した時と退場する時の重量の差が、焼却場に持ち込んだごみの重量になります。焼却場では、トラック毎にごみの重量を計測して、処理費用を請求します。

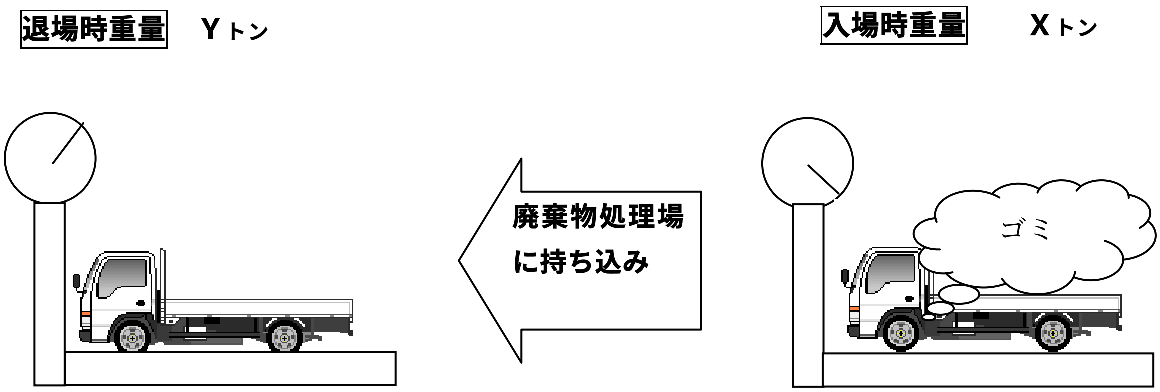
（搬入した時の重量）　－　（搬出する時の重量）　＝　（搬入したごみの重量）

毎日同じトラックで入場する場合は、事前に空のトラックの重量を登録し、退場する際の重量の計測を省略する場合もあります。

（平川幸子）

題材分類	小算３

添付図表



入場時重量（Ｘトン）　－　退場時重量（Ｙトン）　＝　持ち込みゴミの重量

図１　清掃工場に入るごみの計測

出典情報

			題材分類	小算３
題材主題	富士山頂への道のり			
副題	何合目？と標高の関係			
学習指導要領の教科・科目	**学習指導要領の大項目**	**学習指導要領の中項目**	**学習指導要領の小項目**	**備考**
小学算数３年	Ｂ量と測定	（１）長さ、かさ、重さの理解と測定	ア長さの単位	

学習内容のキーワード	高さ、距離	**活用場面のキーワード**	富士山登山、合目、標高

題材とその活用場面

富士山は日本一高い山として知られています。その標高は3776mあります。

富士山に登るときは、５合目から出発するであるとか、７合目まで登ってきた、９合目で頂上はもう目の前とよく言います。でも、同じ何合目という呼び方であっても、高さ（標高）は異なるのです。ここでは、富士山の登山を例に、生活感覚として活用されている単位を見てみましょう。単位の付け方が、登山などの休憩所の目安として利用されています。

説明

富士山を登るために、いくつかの入り口があります。山梨県側、静岡県側からそれぞれ登山道が整備されており、吉田口・河口湖口、須走口、御殿場口、富士宮口・三島口からの大きく４つの登山道が整備されています。

実は、この登山道に応じて、何合目を表す標高が少しずつ異なります。具体的には、表１に示すような合目の呼び名と標高の関係があります。

なぜ、同じ七合目でも標高2700mから3070mまで幅があるのでしょうか。合目の決め方には、いくつか説があります。麓から山頂までの道のりをほぼ十等分して、ひとつひとつを合目としたであるとか、修行僧が手に持った明かりとなる行灯の油の持つ距離ごとに合目を区切ったなどと言われます。

共通することは、ある合目から次の合目へ行く道のりが同じであるということです。富士山を登るにしても、その道は、場所によって急勾配であったり曲がりくねっていたりします。そのため、必然的に同じ時間、同じ疲れ方でたどり着ける『高さ』は異なってきます。そこで、同じくらいの時間をかけて、定期的に一息つけるような間隔を合目で区切っていると言えます。したがって、合目は高さを表す単位ではありませんが、登山の目標として用いられる単位となります。

今では、新五合目や本六合目などと「新」や「本」が合目の呼び名についていますが、おおむねこの何合目と名前が付いている地点に、休憩所や山小屋が整備されており、登山者が一息つける場所となっています。

（丸貫徹庸）

題材分類	小算３

添付図表

表１　各登山道における合目と標高（m）

	吉田口・河口湖口	須走口	御殿場口	富士宮口・三島口
山頂	3776			
九合目	3576	3576	―	3400
八合目	3374	3374	3350	3200
本七合目	―	3100	―	―
七合目	2700	2950	3070	3030
新六合目	―	―	2780	―
六合目	―	2700	―	2600
本五合目	―	2400	―	―
五合目	2305	―	―	―
新五合五勺	―	―	1920	―
新五合目	―	1980	1440	2400

出典情報

富士急行株式会社、http://www.fujikyu.co.jp/、2005 年 2 月 27 日以下より検索
　富士登山（http://www.fujikyu.co.jp/tozan/2001/）より標高データを参照

事例シート

題材分類	小算４

題材主題	「10÷３」を図で描こう
副題	割り切れない割り算を工夫して作図する

学習指導要領の教科・科目	**学習指導要領の大項目**	**学習指導要領の中項目**	**学習指導要領の小項目**	**備考**
小学算数４年	A　数と計算	（５）分数の意味と表し方	ア　分数を用いる場合、分数の表し方	

学習内容のキーワード	除法、割り算、除数、商、余り	**活用場面のキーワード**	割り算、余り

題材とその活用場面

鉄やプラスチックなどの板を３等分して切断したい場合などに、余りが０になる計算式が活用できます。

説明

例えば、「10÷３＝？」という計算式は、10÷３＝3.333333…となって割り切れません。そのため、解は 10/3 と表したり、「商が３で余り１」と表したりします。もちろん、どちらも間違いではありません。

ところで、いま、図１のような幅 10ｃｍの板があるとします。この板を、図２のように同じ幅の 3 枚の板に切り分けることが果たしてできるでしょうか？

そのまま割り算をすると、10（ｃｍ）÷３＝3.333…（ｃｍ）となり、割り切れません。ですが、ひと工夫することにより、きれいに３等分することが可能となるのです。そのためには、12ｃｍや 15ｃｍなどのように、３で割り切れる数値の目盛りがある、10ｃｍよりも長い定規を用意します。そして、図３のように定規を斜めにして、３で割り切れる定規の長さ（図の例では 15ｃｍ）の両端と板の両縁をしっかりと合わせて、定規の目盛りが５ｃｍ、10ｃｍの場所に印を付けます（図では赤丸で示しています）。次に、定規を右に少しずらして同じように印を付けます。こうすることにより、先に付けた両方の印を通る線分が 2 本引けます。この線に沿って板を切ることにより、幅 10ｃｍの板を３等分することができるのです。

このように、ものを等分する作図などの場合には、一見割り切れない計算式であっても、余りが０となるような計算式が成り立つように定規の置き方を考えることにより、それが可能となる場合があります。

例えば、大工さんが木板を３等分しようとする場合にも、上記のような“裏技”を利用することがあるようです。

（瀧陽一郎）

題材分類	小算４

添付図表

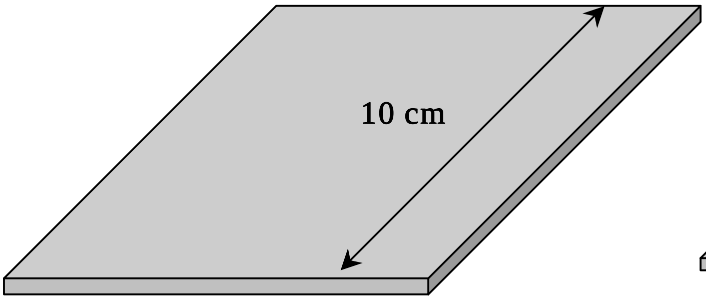


図１　幅 10ｃｍの版

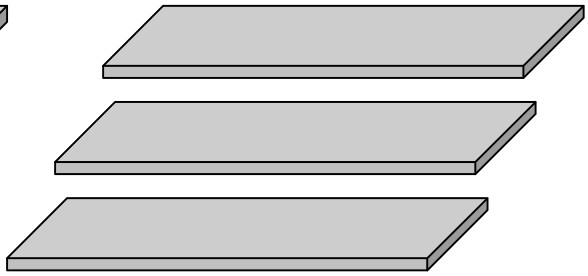


図２　３等分された版

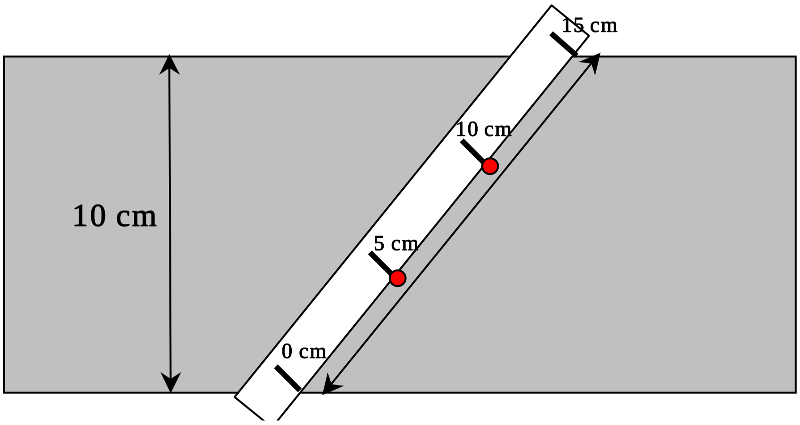


図３　定規を用いて板幅を３等分する方法 ①

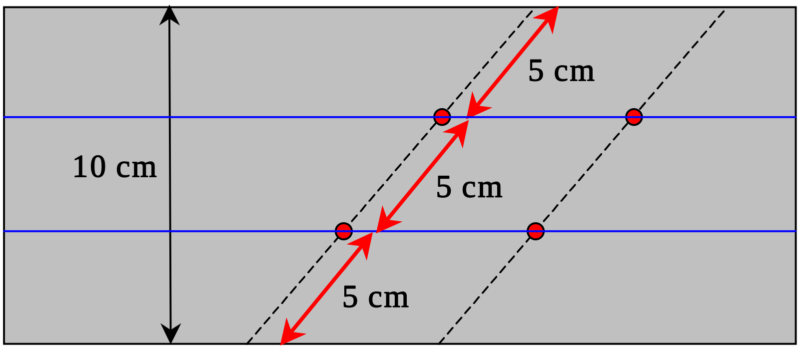


図４　定規を用いて板幅を３等分する方法 ②

出典情報

事例シート

題材分類	小算４

題材主題	「余り」で間違い探し
副題	割り算の余りを用いてデータの間違いを知る技術

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
小学算数４年	A　数と計算	（３）整数の除法の理解と計算	ウ　被除数、除数、商、余りの関係と除法の式	発展的内容
高校数学基礎	（２）社会生活における数理的な考察	ア 社会生活と数学		

学習内容のキーワード	割り算、商、余り	**活用場面のキーワード**	インターネット、データ

題材とその活用場面

割り算の余りが、インターネットによるデータの送信エラーを判別する基本原理として利用されています。

説明

いま、何人かの生徒が数字の伝言ゲームをするとします。最初の生徒は、例えば、65535 という数字を次の生徒に伝えるとしましょう。その数字を聞いた生徒は、同じようにその数字を次の生徒に伝えていきます。それを繰り返して最後の人まで伝わったときに、その数字が 66535 に変わっていたとします。途中で誰かが、言い間違いや聞き間違い、覚え間違いをしたのでしょうが、最後の生徒には、その数字が正しいのか間違っているのか判断できません。何とかして、聞いた数字の正誤がわかるような工夫はできないものでしょうか。

そこで、最初の生徒が、伝える数字の末尾に１つだけ数字を追加してみます。追加する数字は、最初の数字を、ある決まった数で割った余りとします。ここでは「割る数」を 9 とすると、65535÷9＝7281 余り 6 ですから、6 となります。

このようにして、今度は、最初の数字である 65535 の後に 6 をつけて、655356 という数字を伝えていくことを考えてみます。このとき、同じように伝言を繰り返して最後の生徒まで伝わったときに、その数字が 665356 に変わっていたとしましょう。しかし今回は、最後の生徒は、伝わってきた数字の一の位の数（この場合は「6」）が、残りの数（この場合は「66535」）を 9 で割った余りと同じにならなければならないことを知っています。そこで 66535÷6 を計算すると 7392 余り 7 となり、伝わってきた数字がどこかで間違ってしまったということに気付くことができるのです。とても単純な原理ですが、実は、この原理を応用した技術がインターネットの世界で実際に役立っているのです。

インターネットでは世界中のパソコン同士がデータのやりとりをしていますが、データが運ばれる途中で、何らかの原因によりデータが変わってしまうことがあります。そこで、上記と同じように、本来のデータの末尾に、割り算の余りのデータを追加することよってデータの間違いを判別する仕組みが採用されており、これを CRC（巡回冗長検査）といいます。ただし、上の例では「割る数」を 9 としましたが、この場合は仮にデータの間違いが起こっても、余りが偶然に一致することが十分に考えられます。そのため、実際に用いられている「割る数」は、もっと大きな値が標準的に利用されており、例えば、ISO 3309 で規定されている「CRC-32」は、約 43 億分の 1 の確率でしか一致しない「割る数」です。なお、CRC は誤りを「検出」する技術であり、データの間違いの有無は判別できても、間違っている場所やデータの復元はできません。（瀧陽一郎）

題材分類	小算４

添付図表

出典情報

http://www.cs.williams.edu/~tom/courses/336/outlines/lect7_2.html

事例シート

			題材分類	小算４
題材主題	どんな文字が見やすいのかも数字が教えてくれる			
副題	様々な文字の大きさを計算することは、人間の目に優しい文字のデザインに役立ちます			
学習指導要領の教科・科目	**学習指導要領の大項目**	**学習指導要領の中項目**	**学習指導要領の小項目**	**備考**
小学算数４年	D　数量関係	（１）伴って変わる二つの量	ア　二つの数量の関係を調べる	

学習内容のキーワード	距離と高さの関係、二つの数字の比例	**活用場面のキーワード**	見やすい文字表示、識別しやすい文字標識、機器の表示パネルのデザイン

題材とその活用場面

携帯電話やパソコン画面、オーディオ機器や家電製品の操作パネルの文字、また、鉄道機関における発車・行先案内表示や列車の車体表示文字、さらには自動車等に関係する道路標識・案内標識の文字等、様々な場所でいろんな大きさの文字が使われています。表示文字の大きさは、それぞれを見る位置からの距離と人間の視力の関係をからおおよそ決まっています。二つ数量の関係を使うことが、様々な案内表示、屋外看板などの見やすい文字の大きさを求めることに活かされているのです。

説明

視力検査では、5m 先の表示されるランドルト環（環の一部に隙間が開いた C のような記号）とその隙間（感の直径の 1/5）が視認できるかで視力を測ります。直径 7.5mm 環の隙間が識別できるとき視力が 1.0 となります。視力 0.1 では、直径 75mm の環と隙間が識別できることになります。

この見る距離と環の直径の関係を、様々な文字表示板を見る距離と文字の高さ（上下幅）の関係に当てはめると、どのような高さの文字が見えやすいのかを求めることができます。また、身の回りの文字表示がどのような視力の人を対象として作られているのかを知ることができます。

まず、身の回りや屋外でよく見かける文字表示の例から、見る距離と文字の高さの比を求めてみました。これらと視力検査で使われる文字の高さを比較すると、身の回りの製品などが、視力 0.1 程度でも視認できるような大きさ、屋外の案内表示や車や列車の文字などは、視力 0.2～0.5 くらいを対象にしていることがわかりました。

視力が 0.1 や 0.2 では、少し眼が悪く矯正が必要なのではと思われるかもしれませんが、人間は高齢になると視力が自然と低下していきます。また、多少視力が低くてもめがね等をしない人も多くいます。道路標識や列車表示など、必ずしも視力検査のように静止して注視しないものも多くあります。このように様々な人の視力や見る状況を考えて、人の眼に優しい文字の表示板や文字の高さがデザインされているのです。

道路案内標識は、他の文字表示に比べると小さめの文字となっていますが、自動車の運転者には免許取得に必要な視力の下限値があるためと推測されます。

このような一般の文字表示に倣うとすると、普通教室の後のほうの席（例えば黒板まで 7m）から殆どの児童生徒（視力 0.2 を目安）が判別することできる文字は高さでいうと、大よそ 5cm（＝37.5mm×7m／5m）くらいになります。

（薮田尚宏）

題材分類	小算４

添付図表

(a)携帯電話の表示文字高さ約 5mm

(b)電卓の表示文字高さ約 7mm

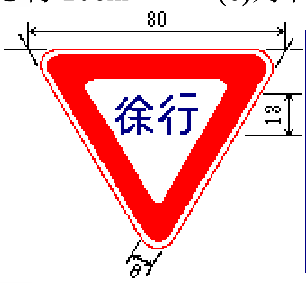
(c)電子レンジの表示文字高さ約 10mm

(d)駅の発車案内板文字高さ約 10cm

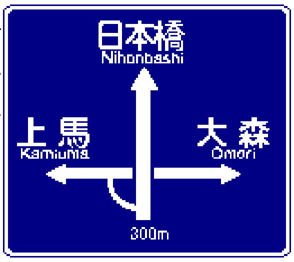
(e)列車の前面表示約 20cm

(f)新幹線の側面文字約 45cm

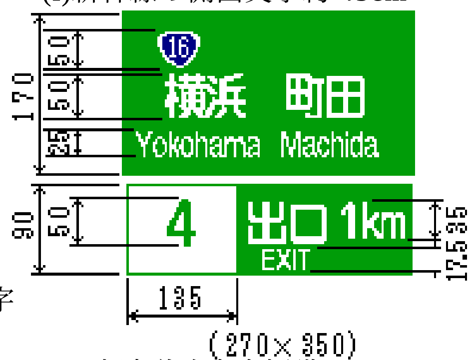
(g)自動車ナンバープレート文字約 9cm



(h)道路標識 13cm



(i)一般道路案内標識文字(漢字)30cm



(j)高速道路案内標識 50cm

図１　様々な表示文字の大きさ（高さ）

表１　様々な表示板を見る距離と文字の高さ

表示の種類	見る距離(m)※2	文字の高さ(mm)※3	距離と高さの比(×1000)
携帯電話	0.25	5	20.00
電卓	0.3	7	23.33
電子レンジ	0.5	10	20.00
自動車のプレート	5	90	18.00
発車案内板	5	100	20.00
道路標識	15	130	8.67
列車の前面表示	20	200	10.00
新幹線の側面表示	50	450	9.00
一般道路案内標識	60	300	5.00
高速道路案内標識	100	500	5.00
視力0.1(※1)	5	75	15.00
視力0.2	5	37.5	7.50
視力0.5	5	15	3.00
視力0.7(普通自動車免許の条件)	5	10.7	2.14
視力1.0	5	7.5	1.50

※1 視力：両眼視力、矯正視力を含む
※2 見る距離：私たちがおおよそ見る距離を目安にした
※3 文字の高さ：標識等基準があるものは基準値を使用。ないものは直接測定値

出典情報

文字表示とデザインは、長町三生著(1993)「感性商品学　感性工学の基礎と応用」海文堂を参考とした。
道路標識は、「道路標識、区画線及び道路標示に関する命令（昭和 35 年 12 月 17 日）総理府・建設省令第３号別表第２（第３条関係）」を引用した。

事例シート

題材分類	小算４

題材主題	**四角形と三角形の違いが新素材を生み出しました**			
副題	四角形（縦横織）を三角形（三軸織）にかえることで、超強度素材が開発されました			
学習指導要領の教科・科目	**学習指導要領の大項目**	**学習指導要領の中項目**	**学習指導要領の小項目**	**備考**
小学算数４年 小学算数５年	C　図形 C　図形	（１）基本的な図形の理解 （１）図形の構成要素と位置関係	ア　二等辺三角形、正三角形の理解と描画 イ　平行四辺形、台形、ひし形の理解と描画	
中学数学２年	B　図形	（２）平面図形の性質と三角形の合同条件	イ　三角形の合同条件の理解	

学習内容のキーワード	三角形の理解、三角形の合同 正方形、四辺形の理解	**活用場面のキーワード**	超強度織物、素材の開発 競技用スパイク、ゴルフシャフトへの利用

題材とその活用場面

正方形は、各辺を一定にしたままで、対角方向の長さを変えると平行四辺形になります。ところが正三角形は、各辺の長さを一定とすると、合同の法則から同じ正三角形にしかなりません。縦糸と横糸で作られる織物の網目は正方形のため、その対角方向に引張られると縦糸、横糸は伸びることなく編目は平行四辺形にゆがみやすくなっています。そこで、三角形の性質から３方向の糸で織った歪みに強い三軸織物が開発されました。三角形と四角形の性質の違いが新しい素材の開発に活かされたのです。

説明

従来の縦糸と横糸を直行させて編まれる織物は、縦方向と横方向の引張には強いが、斜め方向(対角線方向)の力には変形しやすいものでした（図１)。普通の衣服等に使う場合は、問題はないのかもしれませんが、スポーツシューズのようにいろいろな方向から加わる力に対して、中の足がぐらぐらと自在に動き回るようでは、一瞬の強い瞬発力を発揮することができません。特に、100m 競技のように、1/100 秒を争う世界では、シューズの中の無駄な足の動きが勝敗に大きく影響します。

アメリカの有名な陸上競技選手は、1991 年の東京世界陸上に向けて、100m 競技用のスパイクシューズの開発を進めていました。その際に、強い瞬発力を発揮するには、足先の動きをできるだけ少なくなるように締め付けることが有効であることを確認しました。このため従来の縦横編みではなく、変形しにくい３本糸で編む三軸織（図２）のポリエステル素材が開発されシューズの足先甲部分に利用されたということです（図３）。（出典１）このときの優勝タイムは 9 秒 96 で、当時の世界新記録者としてカールルイスの名前が歴史に刻まれました。

正方形は各辺を一定にしたままでも対角方向の長さを変えて平行四辺形になります。つまり縦糸と横糸で作られる織物は、網目が正方形のため、その対角方向に引張られると縦糸、横糸が伸びることなく平行四辺形にゆがみやすいということです。一方、正三角形は各辺の長さを一定とすると形は変わらないので、３方向の糸で織った素材は縦横編みよりも歪みに強くなります。このような四角形と三角形の違いに着目して三軸織物の超強度素材が開発されました。

現在では、競技用のスパイクシューズのみならず、カーボン繊維による三軸織物がゴルフクラブのシャフトに利用され、変形が少なく好反発力のクラブが開発されています。今後は、新素材繊維を用いた三軸織物は、スポーツ分野に限らず幅広く利用されるようになると考えられます。

（薮田尚宏）

題材分類	小算４

添付図表

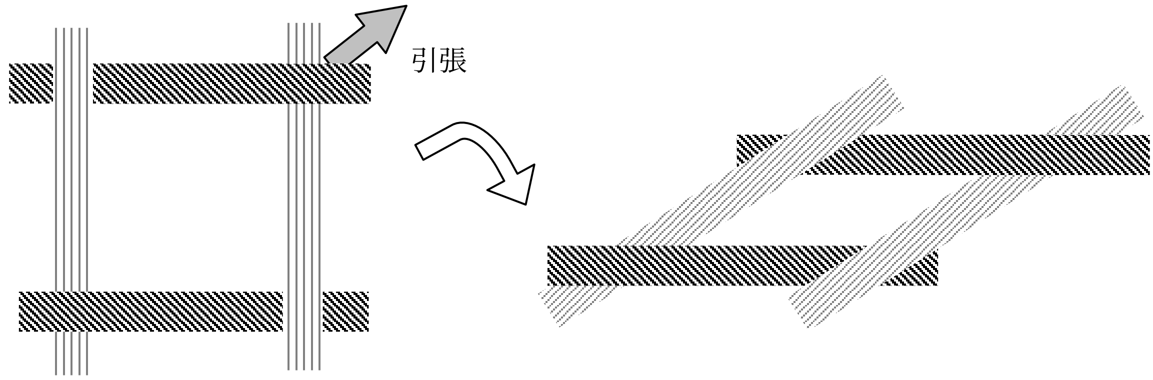


図１　縦糸横糸織物の歪みかた（糸は伸びなくても変形しやすい）

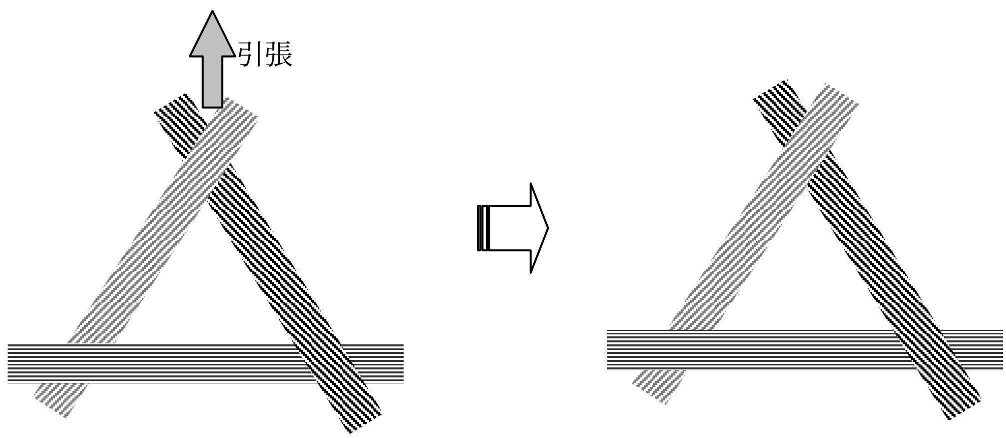


図２　三軸織物に掛かる力と歪み（糸が伸びない限り三角形は変形しない）

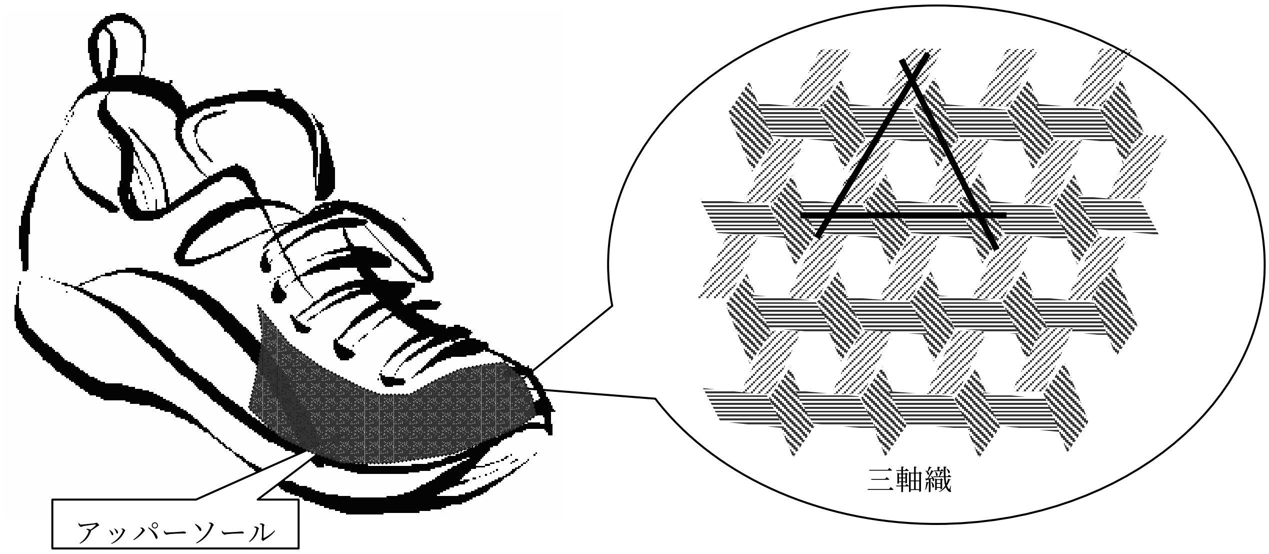


図３三軸織物が利用されている部分（アッパーソール）

出典情報

三軸織アッパーソールシューズの開発と開発秘話は、小山義之著(2002)「スポーツグッツの科学」裳華房、P52～P57 を引用した。三軸織は、ミズノ(株)100m 走専用シューズカタログ「CHRONO DASH IC」を参照した

題材分類	小算４

題材主題	畳の大きさは違う
副題	地域によって異なる面積の畳

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
小学算数４年	Ｂ量と測定	（１）面積の理解と求め方	（ウ）正方形と長方形の面積の求め方	
中学数学３年	Ｂ図形	（１）相似	ア相似	

学習内容のキーワード	長方形の面積	活用場面のキーワード	畳、関東間、関西間（京間）、畳割り、柱割り

題材とその活用場面

家の部屋の広さを表すのに、畳何枚分かで、四畳半間、六畳間、八畳間などと言います。これは、和室で畳何枚分が敷き詰められているかで、感覚的に広さを想像できる尺度です。でも、畳の大きさは種類によって実は違います。どの畳であれば、どれくらいの広さであるのか、面積を正しく理解することで比較することができるようになります。

説明

畳は、鎌倉、室町時代ごろ、武家屋敷などの書院造で部屋に敷き詰める現在の形が作られたと言われています。そして、一般の家庭に普及したのは明治時代ごろと言われています。

昔は、長さを、尺＝10 寸＝100 分などで表し、1 尺は、30.303cm の長さでした。

さて京都以西では、家を建てるとき、畳を基準として畳何枚分ごとに柱を設置するという、畳割りで家が設計されました。一方、東日本では、柱の中心の間隔で建物を設計し、それに合わせた形で畳の大きさを定めた柱割りという考え方が使われました。このような所にも、畳の大きさが地域で異なる由来があります。

畳の大きさは、表１のように、関西間、大津間、中京間、関東間、団地間などで異なります。一般的である関東間では、畳 1 枚の面積は 15453cm^{2}ですが、関西間では、同じ畳 1 枚の面積が 18241cm^{2}と、約 1.2 倍も大きくなるのです。したがって、同じ「六畳間」といっても、基準としている畳の種類によって、狭く感じたり広く感じたりすることがあります。そのため、どんな種類の畳を使用しているかを知り、長辺と短辺の長さがどれくらいか、長方形の面積はどれくらいかを測ることが必要です。またこれは、相似比と面積比の関係から導くこともできます。関西間と関東間は相似な長方形で、その相似比は約 1.09 となります。したがって、面積比は$(1.09)^2$より約 1.2 となるのです。

畳を基準とした畳割りと、柱を基準とした柱割りの考え方の違いは、図１に示すとおりです。

あなたの家に和室がある場合、畳の大きさはどれくらいでしょうか？

（丸貫徹庸）

事例シート

題材分類	小算４

添付図表

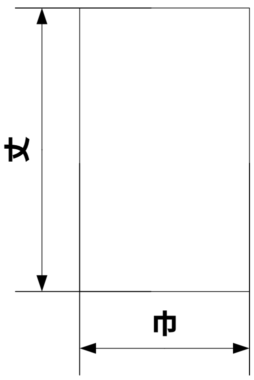


表１　畳の大きさ

畳の種類	巾	丈
関西間	3 尺 1 寸 5 分（約 95.5cm）	6 尺 3 寸（約 191cm）
大津間	3 尺 5 分	6 尺 1 寸
中京間	3 尺	6 尺
関東間	2 尺 9 寸（約 87.9cm）	5 尺 8 寸（約 175.8cm）
団地間	2 尺 8 寸	5 尺 6 寸

※ 関西間と関東間の相似比は、関西間：関東間＝1.09：1

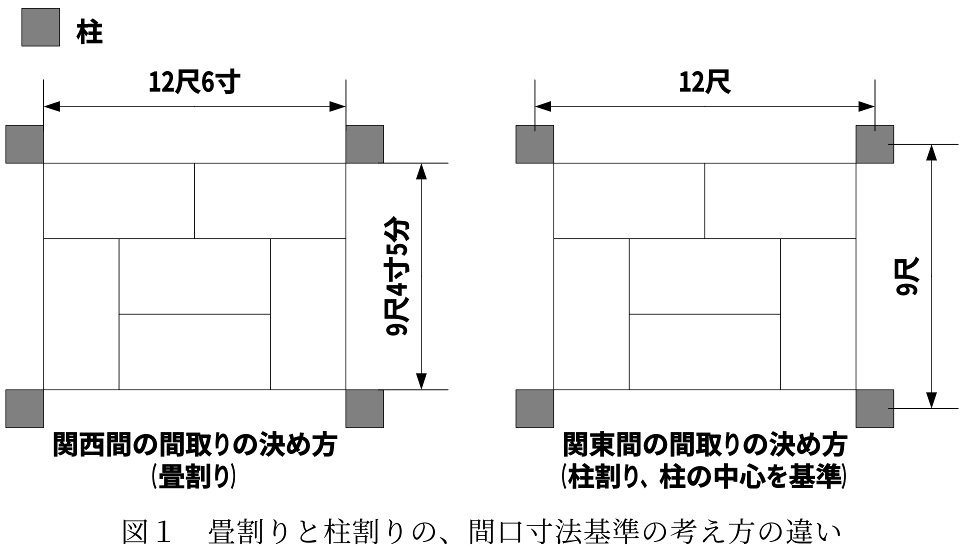


図１　畳割りと柱割りの、間口寸法基準の考え方の違い

出典情報

事例シート

			題材分類	小算５

題材主題	一年は 365.2422 日
副題	うるう年はなぜ４年に１度なの？

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
小学算数５年	Ａ　数と計算	（３）小数の乗法と除法の理解	イ　乗数や除数が小数である場合の乗法と除法の理解	

学習内容のキーワード	小数の乗法と除法	活用場面のキーワード	うるう年の計算

題材とその活用場面

地球は１年をかけて太陽の周りを一周していますが、その時間は太陽年の計算では 365.2422 日です。

そのずれを修正するために、西暦の年号が 4 で割り切れる年をうるう年として一年 366 日とし、例外的に、100 で割り切れる年（1900 年、2100 年など）は 365 日としてうるう年を取り消しています。更に例外として 400 で割り切れる年（1600 年、2000 年など）は 366 日としてうるう年の取り消しを取り消しています。

どうしてこのような計算になるのか、小数の割り算、かけ算で計算すると理解できます。このように小数の計算は、暦の計算をする時にも活用されています。

説明

我々は通常１年を 365 日として生活していますが、１年は実際には 365.2422 日で、暦に比べると毎年 0.2422 日「＝365.2422 日－365 日」が余る計算になります。余った 0.2422 日は、何年分あれば１日になるでしょうか。

１年：0.2422 日＝？年：１日の比が同じになると考えると、1 年／0.2422 日＝：？年／１日→１年÷0.2422 日＝4.1288 年という計算になります。

4.1288 年に１日余るため、4 年に 1 度うるう年として１年を 366 日にすることで、1 日分を調整しています。

毎年余る 0.2422 日が４年分蓄積されて 0.9688 日分「　0.2422 日×4 回＝0.9688 日」となるところに、１日プラスすると、4 年で 0.0312 日分「１日－0.9688 日」が不足します。

４年：0.0312 日＝？年：１日の比が同じになると考えると、4 年÷0.0312 日＝128.2051 年という計算になり、128 年に１日はマイナスしなければならないということになります。

128 は、4 で割り切れる数字ですので、128 年に１度はうるう年を取り消す、ということも考えられますが、実際には 100 年に１度、うるう年を取り消す年を設けています。4 年で 0.0312 日余るということは、100 年では 0.0312 日／4 年×100 年＝0.78 日余っています。その余りを１日マイナスすることで 100 年に 0.22 日ひきすぎてしまいます。そのため、更に 400 年に１度はうるう年の取り消しを取り消して、一日足して 366 日にしています。

複雑ですが、一つひとつ考えると小数の四則演算で計算できる単純な仕組みです。

（平川幸子）

題材分類	小算５

添付図表

表１　うるう年の決まり

条件	
毎年の暦が 365 日だったら･･	**0.2422 日余る** **「365.2422 日 ー　　365 日　　＝0.2422 日」** **（実際の時間）ー（暦の時間）　＝余った時間**
4 年に１度(4 で割り切れる年)を 366 日にしたら･･	**0.0312 日足りない** **「１日　　ー0.9688 日（0.2422 日×4 回）＝0.0312 日」** **（暦の時間）ー（実際の時間）　　　＝足りない時間**
【例外】 **100 年に１度（4 で割り切れる年でも）365 日としたら･･**	**0.376 日余る** **１日　　　ー（0.0312 日×25 回）＝0.22 日」** **（実際の時間）ー（暦の時間）＝余った時間**
【例外の例外】 **400 年に１度（4 で割り切れる年でも）366 日としたら･･**	**0.12 日足りない** **「１日ー（0.22×4 回）＝0.12 日」** **（暦の時間）ー（実際の時間）　　　＝足りない時間**

出典情報

題材分類	小算５

題材主題	自動車の走行距離の測り方
副題	円周の長さの利用例

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
小学算数５年	Ｂ　量と測定	（１）平面図形の譴責を求める計算	イ　円の面積の求め方	

学習内容のキーワード	円周	活用場面のキーワード	自動車、走行距離

題材とその活用場面

自動車に乗る機会があるかと思いますが、メータの中の一つに走行距離があります。走行距離はどのように計測しているでしょうか？自動車の車輪の回転数を利用しています。回転数だけでは距離はでません。タイヤの周の長さをかける必要があります。タイヤの周囲の長さは円周の公式：円周=2×π×半径を利用します。円周の長さを求める公式は自動車の走行距離の計測に利用されています。

説明

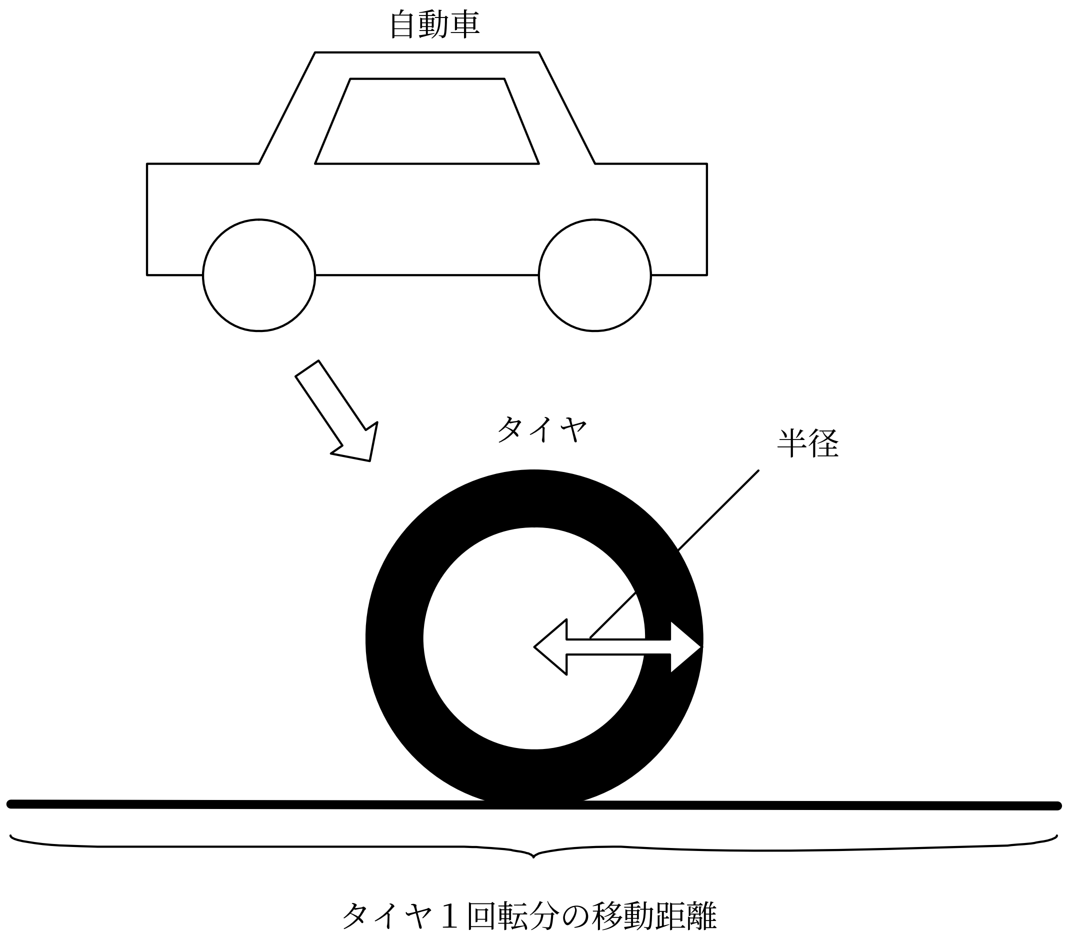
自動車に乗ってドライブに行き、「ああ、○km も走ったのか。」とメータを見ながら思うことがあるかと思います。このとき自動車の走行距離はどのように測っているのでしょうか？自動車の走った距離というのは、タイヤが回転して自動車が移動した距離に相当します。地面に接しているのはタイヤだけですから、タイヤの回転数とタイヤの一周分の長さをかけてあげれば走行距離が計算できます。つまり、走行距離は（タイヤの総回転数）×（タイヤの一周分の長さ）で計算できます。タイヤの一周分の長さは、円周の公式と全くおなじで、円周＝２×π（円周率）×ｒ（タイヤの半径）で求めることができます。回転数については、センサ等で計測することができます。このようにして走行距離の計算を行うことができます。円周の長さを学習することは自動車の走行距離の計測に役立っています。バイク、バス、トラックについても計測の原理は全く同様です。電車についてもあてはまるでしょう。

ということは、タイヤが摩耗して、表面部分が削られて減っていくと実際の走行距離が変わってきてしまいます。また、大きさの違うタイヤに交換しても走行距離が変わってしまいます。注意したいところです。

（松本昌昭）

題材分類	小算５

添付図表



走行距離＝総回転数×２×円周率×半径

図１　自動車の走行距離の求め方

出典情報

http://www.ftpi.net/doc0/spe/06_old/adv/

題材分類	小算５

題材主題	機械の間違いを防げ！
副題	バーコードの読み取りミスを防ぐ数値

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
小学算数５年	A　数と計算	（２）記数法の考え	ア　10 倍、100 倍、１/10、１/100 の数と相互関係	

学習内容のキーワード	整数、倍数	活用場面のキーワード	バーコードの数字の意味、識別番号、スーパーのレジ

題材とその活用場面

お店で買い物をしたとき、レジでピッとバーコードを読み取っていきます。

物の値段を１つ１つレジで打たなくていいので、時間も速いし、間違いもなさそうです。でも、機械がバーコードを読み間違う事はないのでしょうか。あのバーコードは線の太さで数字を表していますが、最後の１桁はその前の数値の読み取りが正しいかどうかを確認する数字なのです。

この数字のおかげで、間違いの確率が 1000 分の１以下になるとも言われています。整数の乗法の学習は、日常的にレジで使われているバーコードの読み取りミスを軽減することに活用されています。

説明

商品に付いているバーコードにもいろいろ種類がありますが、世界共通で使われる商品コードは JAN コード（EAN コード)といわれているものです。JAN コードは１３桁の数字でできています。細い線で、その下の数字を表現しています。最初の２桁はその製品が作られた国、その後の５桁は作った会社のコード、そして会社毎に管理している商品のコード、と続きます。そして、最後の１桁が、その前の１２桁をきちんと読み取ったかどうかをチェックする数字で、チェックデジットと呼ばれています。

このチェックの数字が違っていたら、正しくコードを読み取れなかったということで、エラーになります。このチェックする数字を付けることで、間違いの確率が 1000 分の１以下になると言われています。チェックデジットは例えば次のような計算で求められます。

「４９０１２３４５６７８９」（図１参照）というコードに対して、１３１３１３１３１３１３　をかけていきます。４×１＋９×３＋０×１＋１×３＋‥となります。それを全部足して、10 で割った余りを更に 10 で引いたものがチェックデジットになります。

（4 +27 +0 +3 +2 +9 +4 +15 +6 +21 +8 +27 =126 ）÷ 10＝ 12 余り　6

10 － 6（余り）＝ 4（チェックデジット）

12 桁の数字を機械が全部正しく読み取れなかったら、最後の数字は４にはなりません。

例えば「４９０１２３‥」のコードの９を１、１を９と読み間違えると、最後は４になって、間違いは発見できません。この時、９を読みとれない確率を 100 分の１(１%)、９を１と間違う確率をその 10 分の１(0.1%)、１を９と読み間違う確率を 0.1%と仮定すると、両方が一度に生じる確率は 0.1×0.1＝0.01%となります。これだけで誤読率は 100 分の１になります。

最近は印刷や機械の精度の向上で、読み取りミス自体が少なくなりましたが、数字の工夫でミスを防ぐことができる例は、他にもあるかもしれませんね。

（平川幸子）

事例シート

題材分類	小算５

添付図表

図　JAN コードの例

	JAN メーカーコード									アイテムコード			チェックデジット
桁番号	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
コードの例	4	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	4
	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	
乗数	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	
結果	4	27	0	3	2	9	4	15	6	21	8	27	

（4 +27 +0 +3 +2 +9 +4 +15 +6 +21 +8 +27 =126 ）÷ 10＝ 12 余り　6
10 － 6（余り）＝ 4（チェックデジット）

出典情報

事例シート

		題材分類	小算６

題材主題	円高・円安って何のこと？
副題	単位量当たりの考え方を学ぼう

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
小学算数６年	B 量と測定	（３）異種の 2 つの量の割合である量の比べ方・表し方	ア 単位量当たりの考え方	

学習内容のキーワード	単位量当たりの考え方	活用場面のキーワード	買い物、換金、日常生活

題材とその活用場面

単位量当たりの考え方では、何を基準にとるかをはっきりさせる必要があります。

例えば東京外国為替市場の円・ドル相場では、「1 ドル＝○○円」という表現が使われていますが、見かけの数字の大きさに左右されると、円高ドル安なのか円安ドル高なのか、分かりにくいものとなります。

単位量当たりの考え方に関する学習は、日常生活のさまざまな場面で活かされています。

説明

毎日のニュースで「本日の東京外国為替市場の円相場は、１ドル＝110 円 70 銭と、前日に比べて 30 銭の円高ドル安でした。」などの報道を耳にすることがよくありますね。日本での通貨（円）とアメリカの通貨（ドル）の相場は、誰かが勝手に決めるのではなく、円からドルへまたはドルから円への両替や、外貨預金などの取引量のバランスに応じて決められる仕組みになっています。

話を簡単にするために、1 ドル＝100 円の場合と 1 ドル＝200 円の場合を考えてみましょう。両者は、どちらが円高でしょうか？

円高とは、円の他通貨に対する相対的な価値、つまり、日本の 1 円で交換できる他通貨の金額が上がることです。例えば、旅先のハワイで買い物をするため、手元の１万円をドルに両替するとします。為替レートが１ドル＝100 円であれば、1 万円を両替すると 1 万÷100＝100 ドルになります。一方、1 ドル＝200 円の為替レートで両替すると、１万÷200＝50 ドルにしかなりません。つまり同じ金額の円について、1 ドル＝100 円の場合の方がより多くのドルを取得できるので、正解は「1 ドル＝100 円の方が円高」ということになります。

外国に旅行に行くときには、円高の方が多くの買い物をすることができて、得をすることになります。「1 ドルあたり○○円」という見た目の数字の大きさに惑わされずに、見方を変えて「1 円あたり△△ドル」を考える必要があります。日常生活にはこうした発想の転換が求められることが多くあるので、しっかりと単位量当たりの考え方を身につけておきましょう。

（吉元怜毅）

事例シート

題材分類	小算６

添付図表

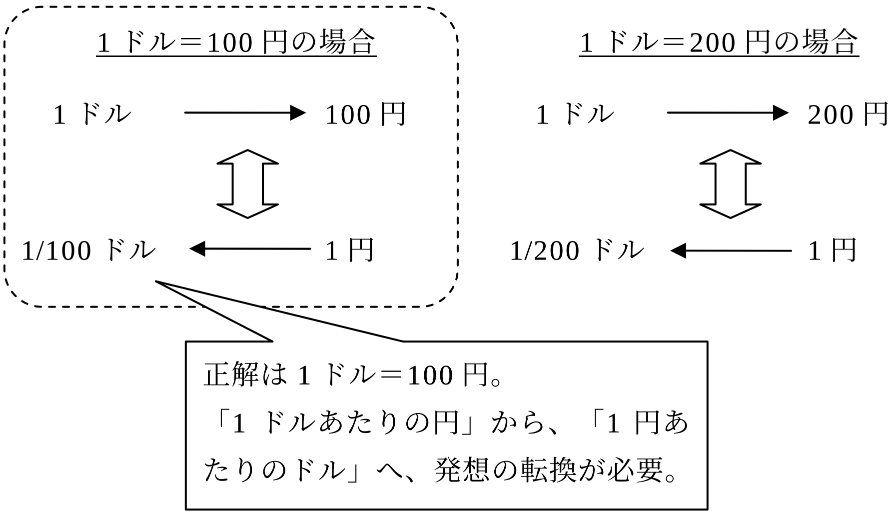


図１　どちらが円高？

出典情報

題材分類	小算６

題材主題	速度の違いを利用する～地震速報への利用～			
副題	速さ・時間・距離の計算の応用例			
学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
小学算数６年	Ｂ　量と測定	（３）異種の二つの量の割合である量の比べ方・表し方	イ　速さの意味と表し方・求め方	

学習内容のキーワード	速さ、時間、速さの違い、距離	活用場面のキーワード	雷の距離、地震の距離

題材とその活用場面

雷が鳴ると、「まだ遠いな」「今のはすごく近かったね」という会話がよく聞かれます。これは、光と音の伝わる速さの違いを利用した身近な例です。同じように地震のときに縦ゆれと横ゆれにも、伝わる速さに差があり、それを使って、地震の発生した場所までの距離を求めることができます。実際に、地震が発生したときに、「震源までの距離は、何㎞」といった報道がありますが、これは同じ原理を用いて計算しています。この学習は、地震の報道や地震対策に活用されています。

説明

遠くで雷が落ちました。ピカッと光ってからゴロゴロ音が鳴るまで 10 秒かかったとしましょう。さて、雷は何㎞離れた場所で発生したでしょうか？（図１）

光の速度は 30 万㎞/秒、１秒間に地球を７周半も回るスピードで伝わります。この場合、落雷地点から自分のいる地点までの間に伝わる時間は無視できますね。

したがって、10 秒間に音が伝わる距離が自分のいる地点から落雷地点までの距離と考えられます。

ここで、音の速度は約 340m/秒です。そうすると、340[m/秒]×10[秒]=3400[m]=3.4[㎞]となり、3.4㎞離れた場所で落雷があったことがわかります。

地震の場合も伝わる速さが違うものがあります。縦ゆれと横ゆれです。地震が発生すると、最初にガタガタ小刻みに縦にゆれ、しばらくしてからゆっさゆっさ大きく横にゆれます（図２）。このように、地震のゆれでは、縦にゆれる波と横にゆれる波の速さに違いがあります。

たての波（速さ：６～８㎞/秒程度）の方が、よこの波（３～５㎞/秒程度）より速く伝わりますので、たて波のゆれが先に到着し、よこ波のゆれは遅れて到着します。

地震が近くで発生した場合は、この二つのゆれは、ほぼ同時に感じることになります。けれども、震源が遠く離れると、その違いをはっきりと感じ取ることができます（図２）。

ここでも、先ほどの雷の場合と同じように、地震の発生した場所＝雷が落ちた場所、たて波＝光、よこ波＝音として考えることができます。たとえば、地震が発生した場所までの距離が８㎞のときでは、二つのゆれが到着する時間の差は、

8[㎞]/4[㎞/秒]－8[㎞]/8[㎞/秒] =1[秒]

となります。時間差が 10 秒では、10 倍の距離の 80㎞ほど離れた場所で地震が発生していると考えることができます。

地震被害の大部分は、あとからくる、よこの波によるものです。たての波が到着してからよこの波が到着する前までの間に、電車を停止するなどして、被害を軽減する地震対策も行われています。

（大熊裕輝）

題材分類	小算6

添付図表

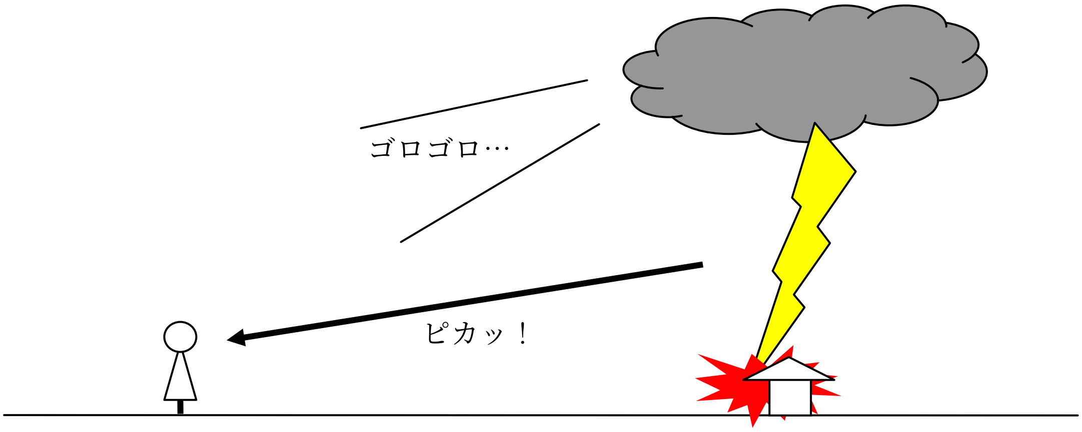


図1　落が落ちた場合、ピカッと光ってからしばらくしてゴロゴロと音が聞こえる。

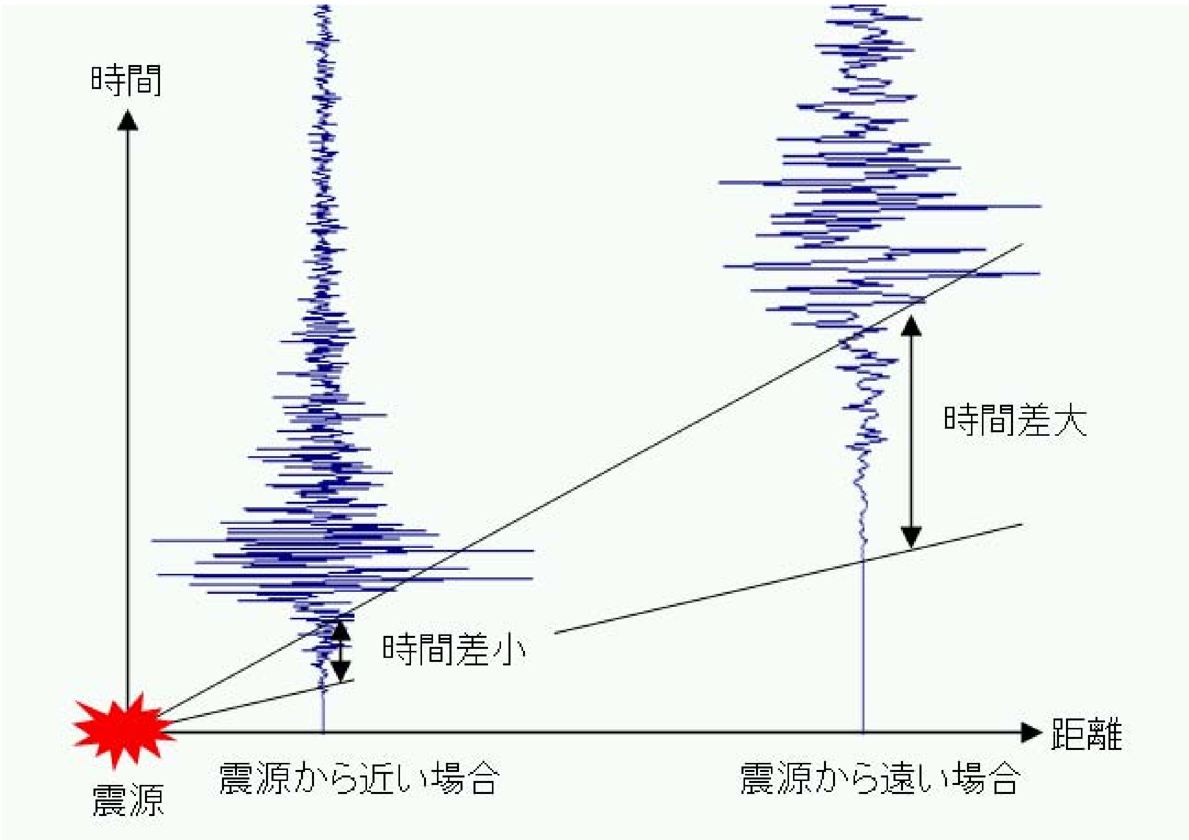


図2　地震の場合、震源から遠いと小さくガタガタゆれ始めてからゆさゆさ大きくゆれるまでの時間差が大きい。

出典情報

題材分類	小算６

題材主題	男性と女性どちらが長生き？
副題	平均寿命を理解する

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
小学算数６年	Ｄ数量関係	（３）平均の意味の理解		
中学数学２年	Ｃ数量関係	（２）確率の理解	イ確率の意味の理解と求め方	

学習内容のキーワード	平均、確率	活用場面のキーワード	平均寿命、平均余命、死亡率

題材とその活用場面

日本は長寿国家と言われます。平成 14 年簡易生命表によれば、男性の平均寿命は 78.32 年、女性の平均寿命は 85.23 年となっています。男性よりは女性の方が長生きが期待されると言えます。では、「おじいさんとおばあさんでは、どちらが長生きするでしょうか？」

平均の学習することは、世の中にあるいろいろな統計指標を正しく理解するために役立っています。

説明

平均寿命とは、0 歳の平均生存年数（平均余命）を指します。平均余命とは、各年齢の死亡率をもとにその年齢における平均生存年数を計算したものです。

図１に、日本の人口を 5 歳刻みの分布で男女別に表したもの（左軸）と、同じく日本の死亡者を 5 歳刻みの分布で男女別に表したもの（右軸）を示します。人口は 50 代までは男性の方が多いですが、それ以降は女性の方が多くなります。死亡者数は、80 代までは男性の方が多いですが、それ以降は女性の方が多くなります。

図２には、男女それぞれの死亡率を 5 歳刻みの分布で示します。死亡率は、その年齢階級にいる人口のうち亡くなられた人の割合となります。

死亡率＝（その年齢階級の死亡者数）／（その年齢階級の死亡者数＋その年齢階級の人口）

また、女性と比較して男性の死亡率が何倍となっているかを、男性死亡倍率として示します。

男性死亡倍率＝男性死亡率／女性死亡率

全年齢階級にわたって、男性死亡倍率は１以上です。したがって、全ての年代で男性の方が死亡する割合が高いことになります。しかしよくグラフを見ると、10 代後半から 60 代にかけてが、特に男性の死亡する割合が高くなっています。男性の平均寿命を低くしているのは、若いうちに男性が死亡する割合が高いことが原因となっています。男性死亡倍率は、70 代を超えると急速に 1 に近づいてきます。これは、男性も女性も死亡する割合に差がなくなってきていることを意味します。

今、長生きされているおじいさんやおばあさんは、グラフからは、これから男女差が小さくなっていく傾向にあると言えます。男女の平均寿命の差は 7 年ほどありますが、これは女性が男性より 7 年長生きするという意味ではなく、男性の方が若いうちに亡くなってしまう傾向が大きいということを反映した結果となるのです。65 歳の平均余命は男性が 16.74 年、女性が 21.23 年、75 歳の平均余命は男性が 10.03 年、女性が 13.14 年、85 歳の平均余命は男性が 5.25 年、女性が 6.89 年と評価されています。

（丸貫徹庸）

題材分類	小算６

添付図表

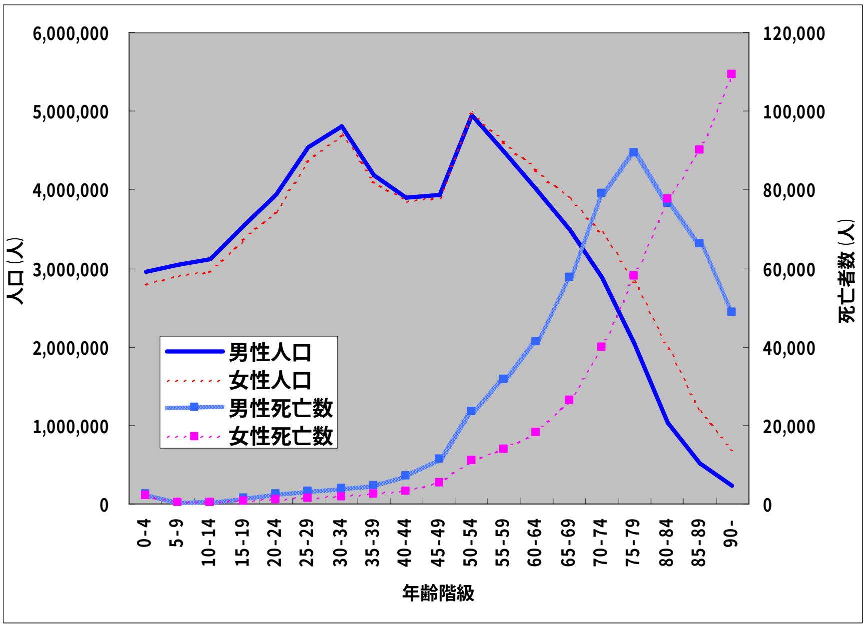


図１　日本の人口と死亡者数の年齢階級別分布

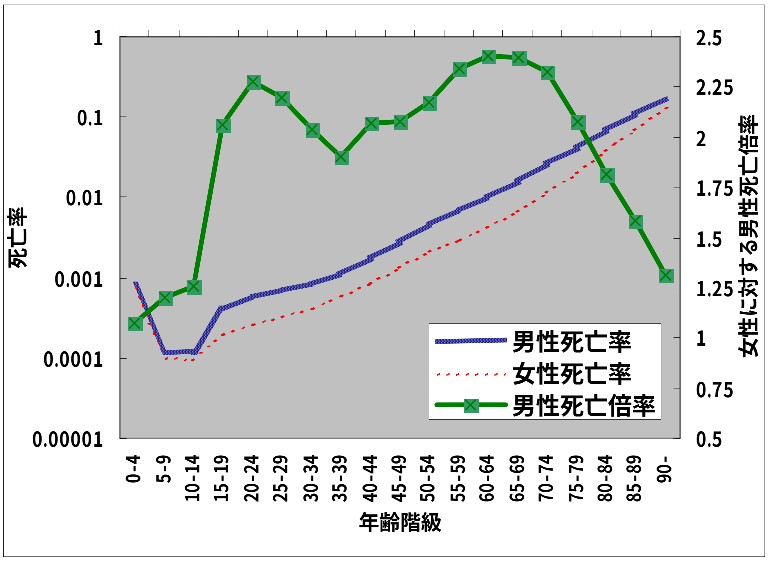


図２　男女の死亡率の年齢階級別分布

出典情報

厚生労働省、平成16年度人口動態調査